

## AERODINÁMICA COMPRESIBLE INESTACIONARIA

A. A. Figuroa, G. Weht, C. G. Sacco, S. C. Chan Chang  
Departamento Mecánica Aeronáutica, Facultad de Ingeniería,  
Instituto Universitario Aeronáutico  
Av. Fuerza Aérea 6500 (X5010JMX) Córdoba, Argentina.  
e-mail: gweht@iua.edu.ar

### RESUMEN

*Se desarrolla la implementación de la formulación ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) en las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles mediante el método de Elementos Finitos. El movimiento de malla se realiza mediante un algoritmo basado en Laplace, resolviendo los desplazamientos para cada grado de libertad. Para integrar en el tiempo se utiliza un algoritmo que mezcla un esquema Adams-Bashforth y Runge Kutta, ambos de alto orden.*

*Se presentan diversos casos de prueba en dominios bidimensionales, comparando los resultados obtenidos con las soluciones analíticas. Finalmente, se analizan dos casos, una de flujo transónico inestacionario de un perfil NACA 0012 y otra de dos perfiles NACA 0012 en tandem a bajo número de Mach sujetos a un movimiento armónico.*

**Palabras clave:** Formulación ALE, Flujo compresible, Aerodinámica Inestacionaria.

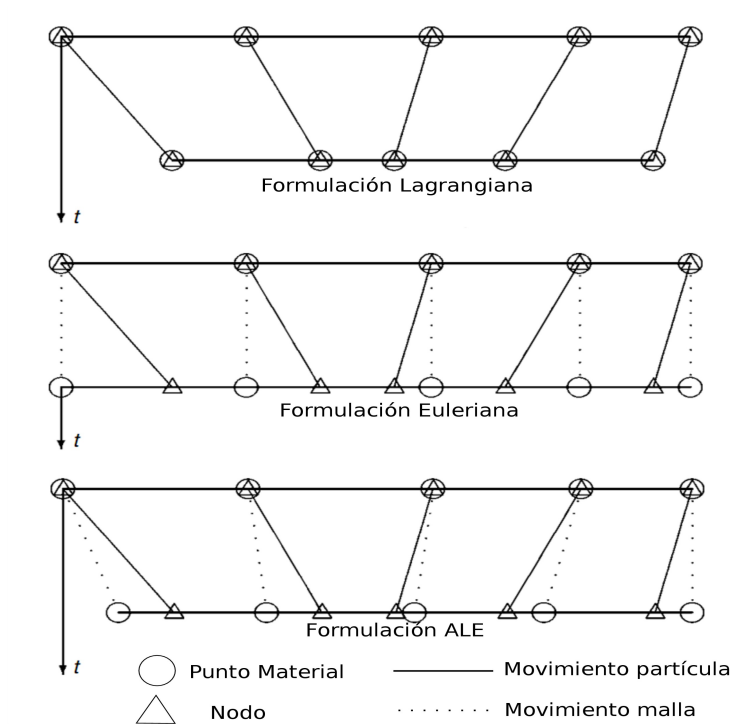
### INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos es ampliamente utilizado en problemas gobernados por sistemas de ecuaciones no lineales. Un problema importante dentro de este grupo, son las ecuaciones de la dinámica de fluidos utilizadas para modelar el movimiento de un flujo compresible viscoso, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes de la dinámica de los gases.

La simulación de problemas numéricos en mecánica de fluidos muchas veces requiere de la distorsión del medio mediante definir interfaces entre el fluido y la estructura. Es fundamental entonces desarrollar un código computacional con una apropiada elección cinemática del medio. De hecho, esta elección determina la relación entre la deformación del continuo y la malla en las zonas de cálculo. Debido a estas condiciones es importante que el método pueda manejar grandes distorsiones y proveer una buena solución a problemas con condiciones de cuerpos móviles en el dominio. Dos clásicas descripciones de movimientos son en general utilizados: una condición Lagrangiana y una Euleriana. La formulación ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) utiliza las ventajas de las dos descripciones antes señaladas minimizando las desventajas tanto como es posible.

Un algoritmo Lagrangiano, es aquel donde cada nodo individual del mallado computacional sigue a la partícula material asociada durante el movimiento y es utilizada comúnmente en mecánica estructural. Una de las dificultades de este método es lograr grandes distorsiones en el dominio computacional sin requerir continuos remallados.

El algoritmo Euleriano es ampliamente utilizado en mecánica de los fluidos. Grandes deformaciones en el medio puede ser manejadas en este algoritmo con relativa facilidad, pero a expensas de una definición precisa de la interfase y de la resolución en los detalles del flujo. Debido a los inconvenientes de una descripción puramente Lagrangiana o Euleriana, se ha desarrollado una técnica que combina las mejores características de ambos métodos. Esta técnica es conocida como formulación ALE. En esta formulación los nodos del dominio computacional pueden moverse con el medio en forma Lagrangiana o estar fijos dando una descripción Euleriana o como se sugiere en la siguiente **Figura 1** moverse de manera arbitraria en el dominio de forma razonable. Dada esta libertad en el movimiento del dominio computacional son permitidas grandes distorsiones con una mayor precisión en la solución.



**Figura 1.** Explicación unidimensional de la formulación Lagrangiana, Euleriana y ALE de movimiento.

## METODOLOGÍA

Las ecuaciones de Navier-Stokes de la dinámica de fluidos representan un sistema de leyes de conservación no lineal, expresando la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía definidos por las siguientes ecuaciones expresadas en forma compacta como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0, \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio con contorno  $\Gamma$ ,  $U$  el vector de las variables de campo o variables conservativas,  $F_i$  es el vector de flujo advectivo y términos de presión y  $G_i$  corresponde a los términos de flujo difusivos. Estos valores se definen de la siguiente manera:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{pmatrix}; F_i = \begin{pmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{1i} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{2i} \\ \rho H v_i \end{pmatrix}; G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ (\tau_{ij} u_j) + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Con  $\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$  donde  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $E$  y  $H = E + p/\rho$  son la densidad,

velocidad, presión, energía total específica y entalpía de estancamiento específica respectivamente. Considerando un gas politrópico, se tiene la siguiente ecuación de estado, la cual brinda una relación adicional para que el sistema de ecuaciones quede determinado:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{|v|^2}{2} \right) \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos. Se adopta  $\gamma=1,4$  para aire calóricamente perfecto. El conjunto de ecuaciones anteriores puede ser llevado a un sistema cuasi-lineal de forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (4)$$

donde  $A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U}$  se denominan jacobianos advectivos y  $K_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial U}$  jacobianos difusivos. Para determinar la solución a un determinado problema es necesario aplicar a la ecuación anterior las condiciones iniciales y condiciones de borde adecuadas.

## IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN ALE EN LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

La forma más conveniente de tratar problemas en donde el dominio de análisis cambia, es reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de referencia ALE. Para lograr esto se reemplaza en los términos convectivos la velocidad material  $v$  y la velocidad de la malla  $\hat{v}$  con la velocidad convectiva  $c = v - \hat{v}$ . El resultado que se obtiene es,

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho(v - \hat{v}) \\ \rho v_1(v - \hat{v}) + p \delta_{1i} \\ \rho v_2(v - \hat{v}) + p \delta_{2i} \\ \rho H(v - \hat{v}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Reemplazando en la ecuación (4), finalmente se obtiene que el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial F_{\hat{v}_i}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (6)$$

en donde el termino  $F_{\hat{v}_i}$  es el obtenido luego de trabajar con la divergencia en el termino  $F$ .

Para estabilizar los términos convectivos se utiliza el método Stream Upwind Petrov Galerkin (SUPG), utilizando la matriz de tiempos intrínsecos propuestos por Tezduyar [8, 9, 10].

## MOVIMIENTO DE MALLA

La nueva posición que posea la estructura en cada paso de tiempo debe modificar la geometría de la malla. Para realizar esto, existen dos posibilidades, rehacer la malla o moverla. La primera opción es mas costosa aunque garantiza tener una buena malla en todos los casos, mientras que la segunda opción mencionada es mas rápida aunque se debe verificar el grado de deformación de los elementos. Esto es así, ya que una mala calidad de elementos afecta a la solución.

En el presente trabajo se opto por el movimiento de la malla y para ello se realiza el siguiente procedimiento:

1. Asignar un movimiento a una determinada estructura.
2. Resolver un sistema de ecuaciones de Laplace para cada uno de los desplazamientos según los grados de libertad asignados. Se imponen los desplazamientos en los nodos de la estructura como condición de contorno.
3. Mover los nodos de la malla a la posición calculada.

El sistema de ecuaciones de Laplace que se debe resolver es,

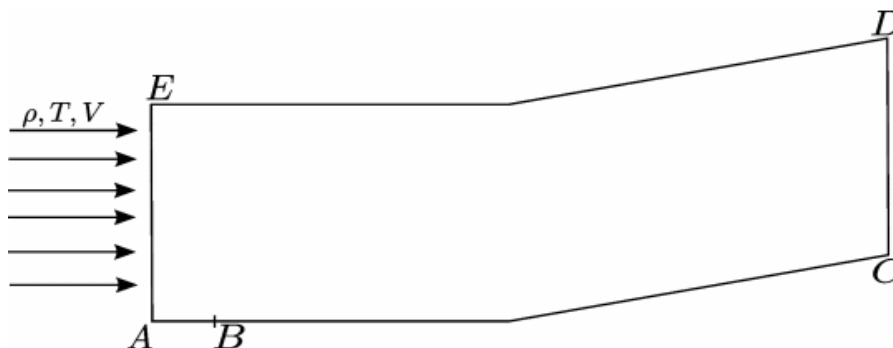
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial X}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( K_x \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_y \frac{\partial Y}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Donde X e Y son las nuevas coordenadas de los nodos de la malla. A su vez a lo largo de cualquier condición de borde se puede fijar X o Y siendo esta una condición de Dirichlet. Este procedimiento da excelentes resultados si los desplazamientos son pequeños. Para evitar deformaciones excesivas en los elementos de la malla se realiza una rigidización de los elementos según el área de cada uno.

### FLUJO VISCOSO SOBRE UNA RAMPA EN COMPRESION LAMINAR

Se analiza la situación conocida como “Compression Corner” que consiste en una rampa con  $10^\circ$  de inclinación con relación al plano horizontal. Es una situación de flujo viscoso con  $M=3$  y número de Reynolds ( $Re=16800$ ) basado en la longitud de la placa plana. El dominio utilizado para el análisis es presentado en Carter [6] con las siguientes condiciones de borde:

1. Velocidad, presión y temperatura a la entrada y en DE
2. Condiciones libres a la salida
3. Velocidad normal nula en AB
4. Velocidad tangencial nula en BC



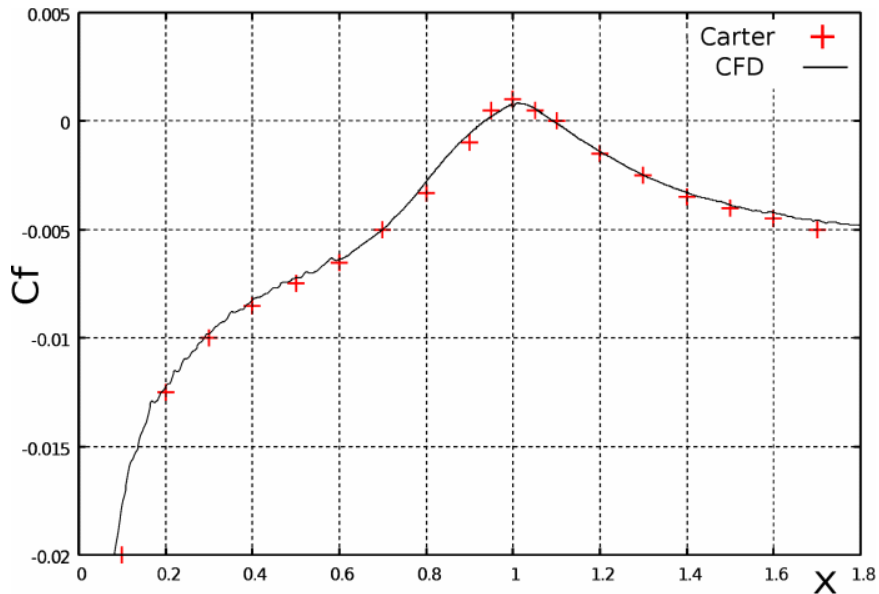
**Figura2.** Geometría utilizada para el modelado de flujo viscoso sobre una situación de "compression corner".

### RESULTADOS

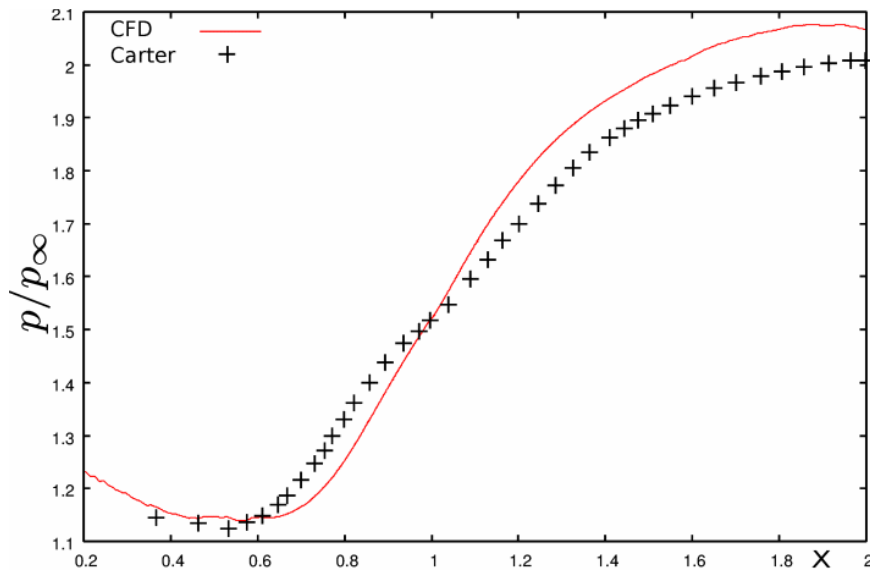
Los resultados buscados consistieron en la distribución de coeficiente de fricción,  $C_f$ , y de las relaciones de presiones,  $\frac{p}{p_\infty}$  en el segmento BC, para poder compararlos por los obtenidos por

Carter [6]. El  $C_f$  es determinado como  $C_f = \frac{\tau_w}{0,5 \rho_\infty u_\infty^2}$ . Las propiedades del flujo utilizadas fueron

de temperatura,  $T = 288,3^\circ K$  y densidad,  $\rho = 1 \frac{kg}{m^3}$ .



**Figura3:** Comparación en la distribución de  $C_f$  entre los resultados obtenidos por CFD y el de Carter.



**Figura4.** Comparación en la distribución de  $\frac{p}{p_\infty}$  entre los resultados obtenidos por CFD y el de Carter.

### FLUJO LAMINAR SOBRE UN PERFIL NACA 0008

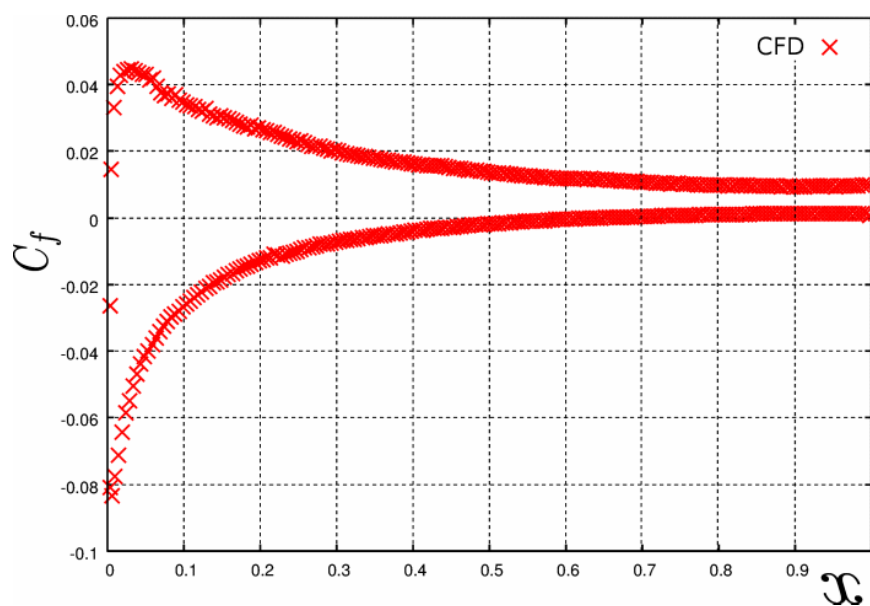
Esta situación consiste en un perfil NACA 0008 en condiciones de flujo laminar a bajo número de Reynolds ( $Re=6000$ ). El perfil NACA posee un ángulo de ataque de  $4^\circ$  frente a la corriente libre y se pretende calcular el coeficiente de fricción para determinar el punto de desprendimiento del flujo sobre el perfil y los valores de  $C_l$  y  $C_d$  para la condición propuesta.

Las condiciones de contorno impuestas son velocidad, densidad y temperatura a la entrada; densidad y temperatura a la salida y sobre el borde superior e inferior del perfil condición de velocidad normal

nula. Sobre el perfil se impuso una condición de velocidad tangencial nula sobre la superficies de este. El número de Mach es de 0,3, la temperatura  $288,3^{\circ}K$  y la densidad  $\rho = 1 \frac{kg}{m^3}$ . Los resultados fueron comparados teniendo en cuenta lo obtenido por Kunz [4], aunque este ultimo presenta los resultados utilizando un modelo de flujo incompresible. Ciertas dificultades se encontraron al momento de comparar los resultados ya que el software utilizado es frágil a bajo número de Mach y que los resultados se obtienen en un régimen compresible.

## RESULTADOS

Como se observa en la siguiente **Figura5** el punto de separación del flujo sobre el perfil ocurre al 63.5% de la cuerda mientras que Kunz obtiene un punto de separación alrededor del 61% de la cuerda.



**Figura5.** Distribución de  $C_f$  sobre un perfil NACA 0008.  $M=0,3$ ,  $\alpha=4^{\circ}$ .

Los valores de  $C_l$  y  $C_d$  son de 0,251 y 0,045 respectivamente; mientras que Kunz solo presenta como resultado el  $C_l$ , siendo igual a 0,233.

## CASO DE ESTUDIO DE FLUJO INESTACIONARIO TRANSÓNICO

El objetivo de este caso es estudiar las características y desarrollo de los coeficientes de momento y sustentación en flujo inestacionario transónico sin viscosidad. Para modelar estas condiciones inicialmente se asigna un movimiento de cabeceo a un perfil NACA 0012 en función del tiempo. La solución de esta situación es contrastada por la dada por Kirshman y Liu [1] basada en los ensayos en túnel realizados por Landon [2].

La simulación consiste en aplicar un movimiento de oscilación prescrito a un perfil NACA 0012 en donde la dinámica instantánea es dada en función del tiempo según la ecuación (8).

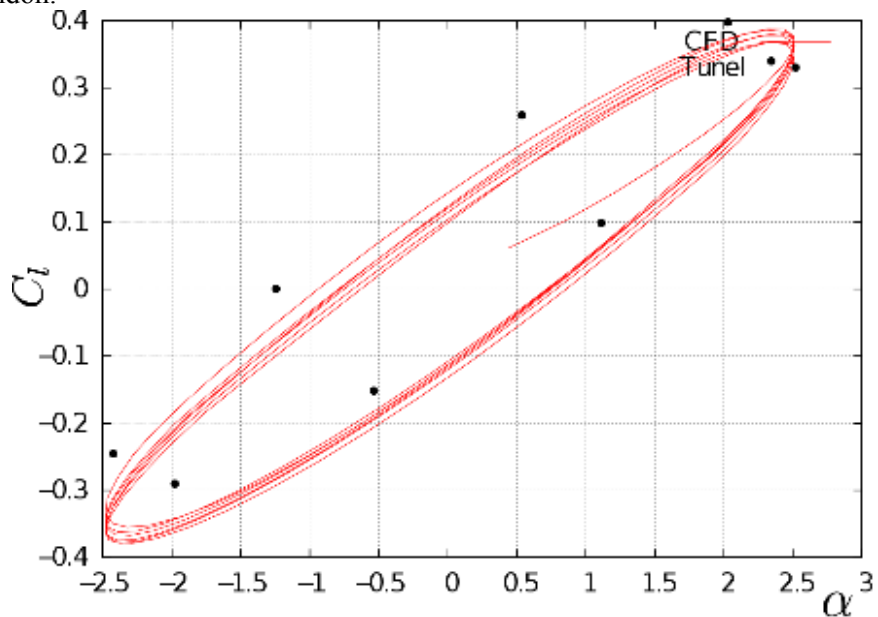
$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \text{sen}(wt) \quad (8)$$

Para este análisis particular, se considera el caso realizado en el AGARD CT 5 [2]. El punto alrededor del cual el perfil realiza el movimiento oscilatorio es al 25% de la cuerda desde el borde de ataque. Este caso toma al perfil NACA 0012 en una corriente libre a número de Mach 0.755 con un ángulo

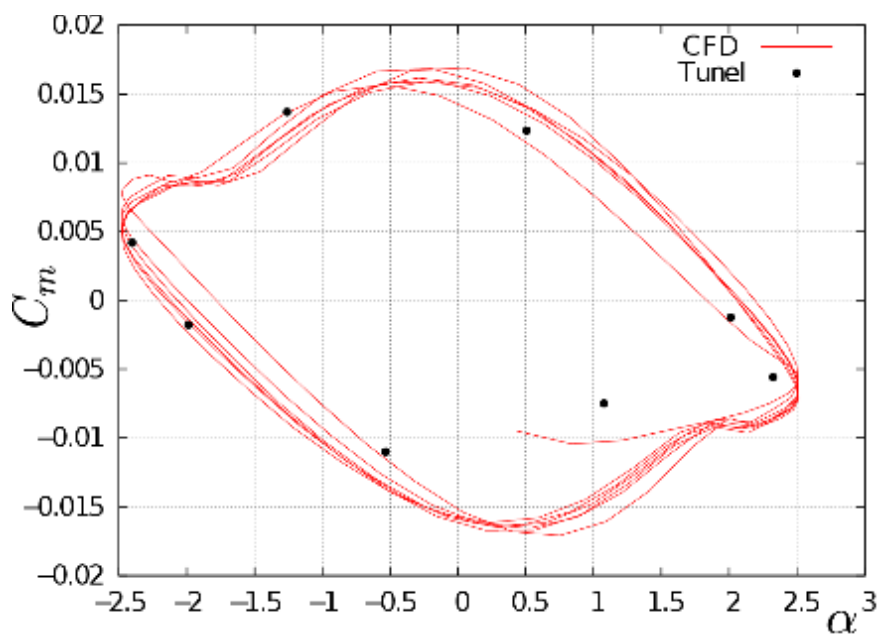
medio de ataque de  $\alpha_m = 0,016^\circ$ . Las propiedades para este caso son  $V = 253,2 \text{ m/s}$ ,  $T = 280 \text{ K}$  y la frecuencia de oscilación es  $\omega = 41,22 \text{ hz}$  y una amplitud de  $\alpha_0 = 2,51^\circ$ .

## RESULTADOS

Dentro de los resultados a analizar en este caso de estudio se encuentra el del cálculo de  $C_l$  y  $C_m$  en el tiempo. Se obtienen las curvas de  $C_l$  y  $C_m$  según el ángulo de ataque. En esta situación se compara los resultados obtenidos (**Figura6** y **Figura7**) y se correlacionan bien lo publicado de resultados en túnel, por Landon.



**Figura6.** Resultado obtenido por Landon en ensayos experimentales vs CFD;  $C_l$  vs  $\alpha$ .



**Figura7.** Resultado obtenido por Landon en ensayos experimentales vs CFD;  $C_m$  vs  $\alpha$ .

## PERFILES NACA 0012 EN TÁNDEM

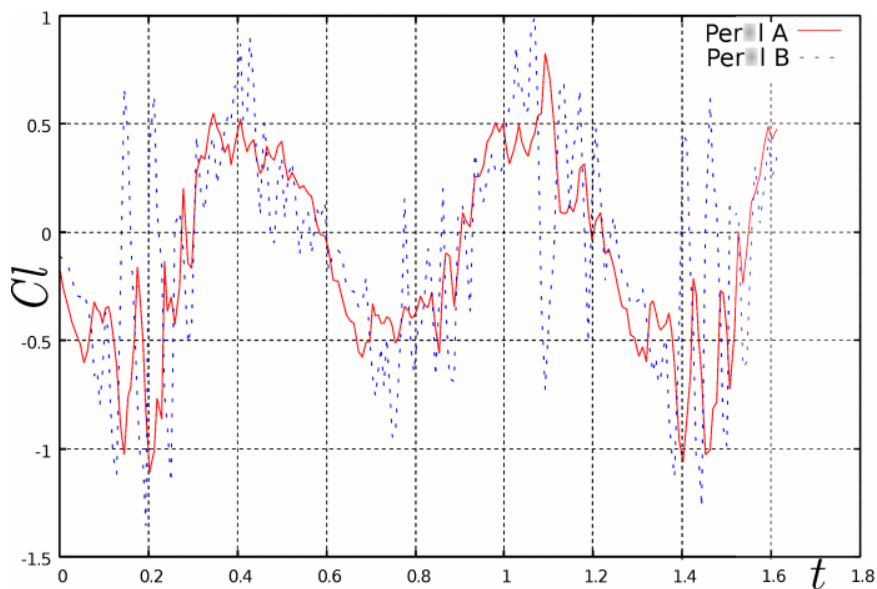
El próximo caso de estudio utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes consiste en dos perfiles NACA 0012 en tandem con un movimiento oscilatorio de cabeceo preasignado alrededor de un punto impuesto. La cuerda de cada uno de los perfiles es  $c=1$ . En el instante inicial,  $t=0s$  los dos perfiles poseen ángulo de ataque  $0^\circ$  y están alineados alrededor de un eje horizontal. La distancia entre el borde de fuga del primer perfil y el de ataque del segundo es de  $d=0.1$ . Los dos perfiles se trabajan como sólido rígidos y rotados alrededor de los puntos  $p=c/3$  en sentido horario. La función que prescribe el movimiento armónico es la siguiente,

$$\theta = A \operatorname{sen}(10t) \quad (9)$$

donde  $A = \pi/8$  y  $t$  el tiempo. El flujo posee un número de Mach de 0.3 y número de Reynolds 3000 con condiciones de atmósfera estándar.

## RESULTADOS

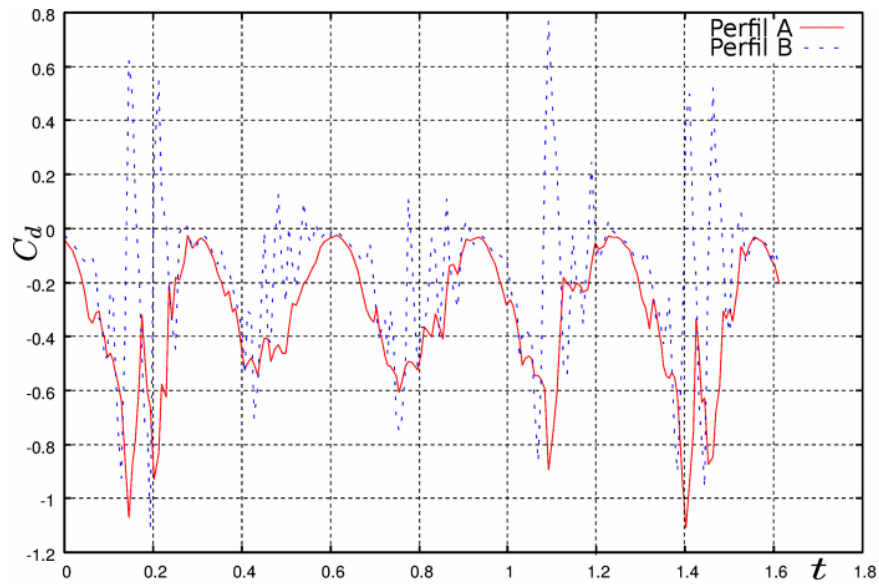
Los resultados obtenidos corresponden al  $C_l$  y  $C_d$  de ambos perfiles siendo el perfil A el delantero y el perfil B el trasero. Estas variaciones de  $C_l$  y  $C_d$  en el tiempo se pueden observar en la **Figura8** y **Figura9**.



**Figura8.** Resultado obtenidos de  $C_l$  vs  $t$  sobre el perfil A y el perfil B.

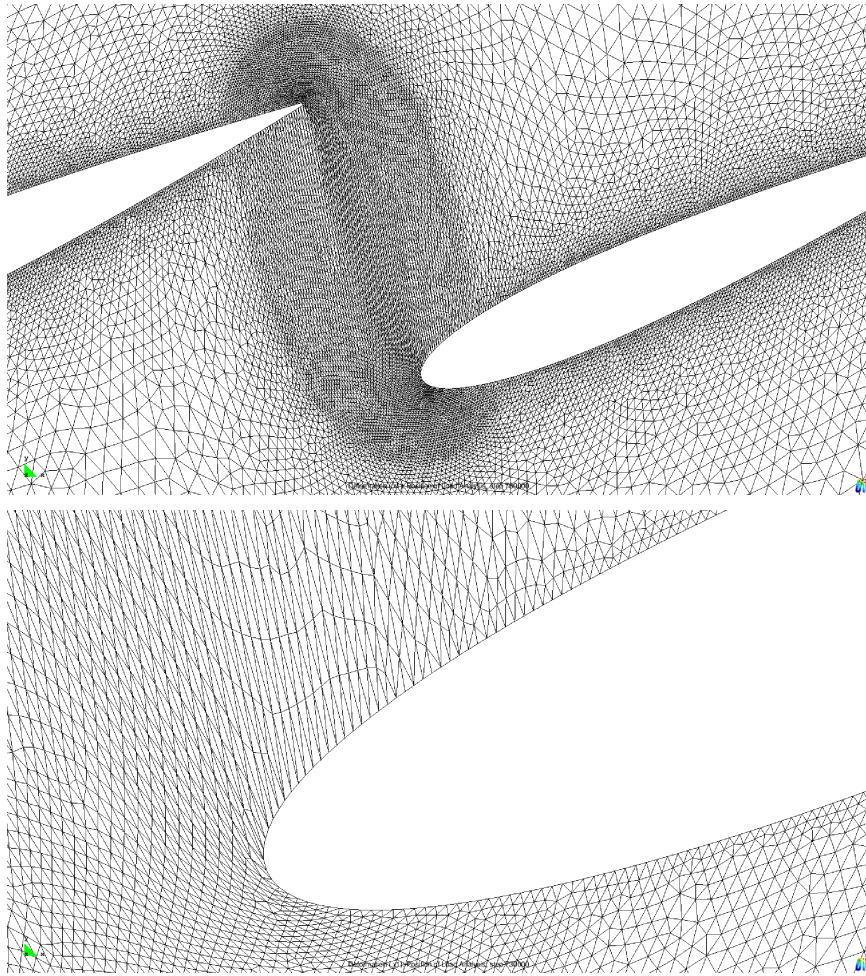
Se observa como en el gráfico de  $C_d$  vs  $t$  sobre el perfil B existen ciertos picos en relación a los valores del perfil A. Analizando las simulaciones estos picos coinciden en el momento en que se liberan vórtices del perfil delantero, y estos vórtices impactan sobre la superficie del perfil trasero.





**Figura9.** Resultado obtenidos de  $C_l$  vs  $t$  sobre el perfil A y el perfil B.

A su vez como dato a tener en cuenta como trabajo futuro, se observan elementos aceptables pero aún mejorables, según la **Figura10**, en las proximidades del borde de ataque del perfil trasero en el momento de máxima amplitud, y se propone utilizar otras técnicas a la aplicada en el movimiento de malla para intentar mejorar estos elementos.



**Figura10.** Detalle de la malla sobre el borde de ataque del perfil trasero en  $t$ =máxima amplitud.

## CONCLUSIONES

En el presente Trabajo se desarrolló un método para la implementación de la formulación ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) en las ecuaciones de Navier Stokes mediante el método de Elementos Finitos. Dada la velocidad relativa existente entre el fluido y la estructura, los términos convectivos de las ecuaciones de Navier-Stokes se ven afectados y deben ser reformulados. La obtención de estos nuevos términos y su discretización mediante el método de Elementos Finitos es parte del desarrollo de este trabajo. Las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas más los términos necesarios para la estabilización del esquema discreto y los términos de captura de choque forman parte del sistema de ecuaciones que se debe resolver para la obtención de las soluciones a los Test-Case que se proponen.

Los casos de estudio consistieron en una rampa en compresión, un perfil NACA 0008 en flujo laminar, un perfil NACA 0012 en flujo transónico inestacionario y finalmente un caso de perfiles NACA 0012 y puestos en tándem en flujo subsónico sometidas a un movimiento armónico. Se analizaron diversos coeficientes aerodinámicos en el tiempo de simulación o sobre un cuerpo específico según el caso y se compararon con resultados obtenidos en túnel o con estudios previos de cada caso mediante CFD y se encontraron grandes similitudes con las mediciones de referencia.

## REFERENCIAS

1. Kirshman D.J. y Liu F. 2005, Flutter prediction by an Euler method on non-moving Cartesian grids with gridless boundary conditions, University of California, Irvine.
2. Landon R.H. 1982, NACA 0012 oscillating and transient pitching, compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements, Data Set 3. AGARD Report R-702.
3. Donea J., Huerta A., Ponthot P., Rodriguez-Ferran A. 2004, Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods, Wiley, Encyclopedia of Computational Mechanics, Chapter 14.
4. Kunz P. J., 2003, Aerodynamics and Design for Ultra-Low Reynolds Number Flight, PhD Thesis, Stanford University.
5. Wang L. y Persson P., 2013, A Discontinuous Galerkin Method for the Navier-Stokes Equations on Deforming Domains using Unstructured Moving Space-Time Meshes, 21<sup>st</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.
6. Carter J., 1972, Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Supersonic Laminar Flow Over Two-Dimensional Compression corner, NASA TR R-385.
7. Hung C. M. y MacCormack R. W., 1976, Numerical Solutions of Supersonic and Hypersonic Laminar Compression Corner Flows, AIAA Journal, Volume 14, Number 4.
8. Tezduyar T.E. y Hughes T.J.R., 1982, Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations, NASA Tech. Rep. NASA-CR-204772.
9. Tezduyar T.E., 2004, Determination of the stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, ECCOMAS.
10. Tezduyar T.E. y Masayoshi S., 2005, Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, Comp. Methodes Appl. Mech. Engrg.
11. Soto O. y Lohner R., 2001, A time-accurate implicit-monolithic finite element scheme for incompressible flow problems, ECCOMAS.