

MÉTODOS MULTIMALLA SOBRE MALLAS SEMI-ESTRUCTURADAS PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Elvio Heidenreich^{a,b}, Francisco J. Gaspar^c, Francisco J. Lisbona^c and Carmen Rodrigo^d

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela Superior Técnica, Buenos Aires, Argentina,*
<http://www.ingenieriaest.iese.edu.ar/>

^b*Instituto de Investigaciones Científicas y Técnicas para la Defensa, Villa Martelli, Buenos Aires, Argentina, elvioh@citefa.gov.ar, <http://www.citedef.gob.ar>*

^c*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, España, ffgaspar@unizar.es,*
<http://pcmap.unizar.es/>

^d*Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar de Zaragoza, España,*
carmen.rodrido.cardiel@gmail.com, <http://cud.unizar.es/>

Palabras clave: Ecuaciones de Navier-Stokes, Métodos multimalla, Elementos finitos.

Resumen. Uno de los aspectos más importantes en la simulación numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes es la eficiente resolución de los grandes sistemas de ecuaciones que resultan al discretizar flujos internos o externos. Este trabajo está enfocado a la resolución eficiente de un flujo incompresible en triángulos de diferente forma, y así en un futuro disponer de una herramienta de diseño para flujos internos y externos. Es bien conocido que el método multimalla es uno de los métodos más rápidos para resolver grandes sistemas de ecuaciones, con factores de convergencia muy pequeños e independientes de la malla usada. Los métodos multimalla geométricos, inicialmente diseñados para mallas rectangulares, son susceptibles de ser usados en mallas triangulares semi-estructuradas. A partir de una malla gruesa no estructurada que capture la geometría del dominio, se construye la jerarquía de mallas por refinamiento regular de los elementos de la malla no estructurada, dividiendo cada triángulo en cuatro triángulos congruentes. Las mallas resultantes son globalmente no-estructuradas, pero localmente estructuradas en cada elemento original. Explotando la regularidad de la malla y con una estructura de datos adecuada, el código puede ser implementado sin ensamblar la matriz de coeficientes del sistema, reduciendo drásticamente la memoria requerida y dando lugar a métodos de resolución realmente muy eficientes. En este trabajo se presenta un método multimalla geométrico en mallas semi-estructuradas triangulares para la resolución eficiente de las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas por elementos finitos cuadráticos para aproximar las velocidades y lineales para la presión. Este método se basará en un suavizador de tipo Vanka, el cual puede considerarse como un método de Gauss-Seidel por bloques solapados. Además, se utilizará una estructura de datos adecuada para conseguir una eficiente implementación del método basada en moléculas, es decir, sin ensamblar la matriz de coeficientes del problema. Esto nos permite realizar simulaciones con un gran número de incógnitas utilizando muy poca memoria y con un coste computacional muy reducido.

1 INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que el método multimalla [Brandt \(1984\)](#); [Briggs et al. \(2000\)](#); [Hackbusch \(1985\)](#); [Trottenberg et al. \(2001\)](#) es uno de los métodos más rápidos para resolver grandes sistemas de ecuaciones, con factores de convergencia muy pequeños e independientes de la malla usada. Básicamente hay dos clases de métodos multimalla, geométricos y algebraicos. En los métodos multimalla geométricos una jerarquía de mallas debe de ser propuesta y principalmente se han aplicado sobre mallas estructuradas. Por otro lado, los métodos multimalla algebraicos no utilizan ninguna información en relación con la malla en la que el problema es discretizado, y están relacionados con discretizaciones por elementos finitos sobre mallas no estructuradas definidas sobre dominios complejos, y con problemas con gran variación en los coeficientes de la ecuación. En general los métodos multimalla geométricos tienen un coste computacional menor por iteración que los algebraicos debido a que explotan la regularidad de la malla y la simplicidad de la estructura de datos. Por tanto, cuando un método multimalla geométrico puede ser definido de forma adecuada, es preferible a un método multimalla algebraico.

Una alternativa que permite resolver problemas con geometría relativamente compleja de forma eficiente es la aplicación de métodos multimalla geométricos sobre mallas semi-estructuradas. Esto es, a partir de una malla grosera no estructurada \mathcal{T}_0 que capture la geometría del dominio, se construye la jerarquía de mallas por refinamiento regular de los elementos de la malla no estructurada, dividiendo cada elemento en cuatro elementos congruentes. Las mallas resultantes son globalmente no-estructuradas, pero localmente estructuradas en cada elemento original. Esta estrategia genera una sucesión de mallas conformes jerárquicas, $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_l$, donde los operadores de transferencia entre dos mallas consecutivas pueden ser definidos de forma geométrica. Otra ventaja de la utilización de estas mallas es la posibilidad de poder implementar el método multimalla en una versión libre de matriz, esto es, resolver el sistema sin construir la matriz de coeficientes. En el caso de discretizaciones por elementos finitos, es usual calcular dicha matriz mediante el algoritmo de ensamblado, esto es, recorrer todos los elementos de la triangulación, construyendo la matriz local y sumando su aportación en la posición correcta. En discretizaciones de problemas con coeficientes constantes definidas en mallas semi-estructuradas, no es necesario ensamblar la matriz, ya que el método de los elementos finitos puede ser implementado usando moléculas. Notar que en mallas semi-estructuras construidas de la forma descrita en el párrafo anterior, una molécula es suficiente para representar el operador discreto en cada elemento grosero, ya que todas las ecuaciones correspondientes a los nodos interiores en un nivel de refinamiento fijo de dicho elemento son las mismas. Por tanto, el proceso estándar de ensamblado sólo es utilizado en la malla más grosera \mathcal{T}_0 , lo que reduce drásticamente la memoria requerida para almacenar las matrices, dando lugar a métodos de resolución muy eficientes. Recientemente, se ha propuesto una implementación basada en moléculas para la resolución por métodos multimalla geométricos sobre mallas semi-estructuradas del problema de Poisson [Gaspar et al. \(2010\)](#) y del problema de la elasticidad [Gaspar et al.](#)

Uno de los aspectos más importantes en la simulación numérica de la mecánica de fluidos es la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Una implementación del método de los elementos finitos de Taylor-Hood sobre mallas semi-estructuradas basada en moléculas se ha propuesto recientemente en [Heidenreich et al.](#). Este trabajo está enfocado a la descripción de las componentes del método multimalla geométrico adecuado para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles discretizadas por elementos finitos Taylor-Hood en mallas tri-

angulares semi-estructuradas.

La organización del artículo resulta de la siguiente manera. En la Sección 2 el problema, la linealización y la correspondiente discretización por elementos finitos son introducidas. En la Sección 3 se describe el método multimalla geométrico que se va a proponer en este trabajo, haciendo especial énfasis en el suavizador de tipo caja, que es adecuado para el problema que se trata. Finalmente, en la última sección, Sección 4, mediante el método multimalla geométrico propuesto en la sección anterior, se presenta la resolución del problema del flujo laminar incompresible en una cavidad triangular impulsada por una pared móvil.

2 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y SU DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

En este trabajo consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en el caso estacionario,

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = (u, v)^t$ denota el vector de velocidades, p es la presión, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. La condición de contorno de Dirichlet para las velocidades viene dada por \mathbf{g} , que satisface la condición de compatibilidad

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0. \quad (2)$$

El problema no lineal (1) es linealizado por el método de iteración de punto fijo, esto es, si (\mathbf{u}^n, p^n) es la solución correspondiente a la iteración n , entonces la solución correspondiente a la siguiente iteración es calculada resolviendo el problema

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= \mathbf{0}, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} &= 0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{g}, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

El problema lineal de tipo punto silla (3), conocido en la literatura como problema de Osseen, es discretizado por elementos finitos. Sea \mathcal{T}_h una triangulación del dominio Ω , esto es, descomponemos el dominio Ω en un conjunto $\{K_i\}_{i=1}^N$ de triángulos de forma que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N K_i,$$

y de manera que la intersección $K_i \cap K_j$, para $i \neq j$, es o bien vacía, o bien un lado común, o bien un vértice común. Consideramos $P_2 - P_1$, el par de espacios de elementos finitos para aproximar el problema (3), donde P_k es el espacio de funciones continuas polinómicas a trozos de grado k . Por tanto, las velocidades son representadas en cada elemento por los valores en seis nodos (los tres vértices y los tres puntos medios de los lados del triángulo) y son interpoladas usando polinomios cuadráticos. La presión es representada por los tres nodos asociados a los

vértices y es interpolada usando polinomios lineales. Este par de espacios de elementos finitos cumple la condición de estabilidad de Babuška-Brezzi, también llamada condición inf-sup, garantizando la resolución única de nuestro problema discreto. Además, como en este trabajo se van a considerar problemas de flujo con número de Reynolds bajo, no es necesario aplicar técnicas de estabilización con respecto al término convectivo. Por tanto, después de linealizar el problema de Navier-Stokes y de discretizar por elementos finitos, resulta en un sistema de ecuaciones lineales de tipo punto silla

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

que hay que resolver en cada iteración.

Para la implementación por elementos finitos de este sistema es usual construir la matriz mediante el algoritmo de ensamblado. En cambio, debido al carácter semi-estructurado de la malla, nuestro propósito es llevar a cabo una implementación basada en moléculas para las regiones estructuradas de la misma, ya que esto nos proporciona ventajas tanto en el ahorro de memoria como en la rapidez de cálculo. Además, un pequeño número de moléculas es suficiente para representar los operadores discretos asociados a los términos lineales de nuestro problema, ya que éstos son iguales para todos los nodos interiores.

Debido al uso de elementos finitos cuadráticos para las velocidades, las incógnitas están localizadas tanto en los vértices de la triangulación como en los puntos medios de los lados. Por lo tanto, se obtienen diferentes ecuaciones y como consecuencia diferentes moléculas dependiendo del tipo de nodo considerado. Para la construcción de estas moléculas, se extiende la filosofía utilizada en [Gaspar et al. \(2010\)](#) al caso de elementos finitos cuadráticos. Esta generalización fue desarrollada en [Heidenreich et al.](#), donde se presentó el cálculo eficiente de estas moléculas usando un hexágono de referencia. En particular, podemos obtener una expresión de las moléculas buscadas en función de ciertas moléculas calculadas a-priori sobre el hexágono de referencia. Con esta estrategia de implementación de las moléculas, obtenemos grandes ventajas en cuanto a la eficiencia del método. Esto se basa en que cada vez que se debe realizar el cálculo de la molécula, en vez de tener que ensamblar las contribuciones de cada uno de los seis triángulos que intervienen en la ecuación, simplemente se multiplican los coeficientes que se obtienen a partir de la transformación afín por las moléculas en el hexágono de referencia, que han sido calculadas y almacenadas a-priori.

3 MÉTODO MULTIMALLA EFICIENTE BASADO EN UN SUAVIZADOR DE TIPO CAJA

El diseño de un método multimalla geométrico eficiente depende en gran medida de la interacción entre el suavizador y el operador de corrección en la malla grosera. Esto provoca, que la elección de las componentes que forman el algoritmo tenga mucha influencia en el comportamiento final del método. En primer lugar, una jerarquía de mallas debe de ser definida para su implementación. Como hemos dicho antes, la aplicación de varios niveles de refinamiento regular sobre una malla inicial no estructurada da lugar a una jerarquía de mallas anidadas globalmente no estructuradas pero que son adecuadas para el desarrollo del método multimalla, ya que en las regiones estructuradas de la malla la aplicación del método multimalla geométrico es directa. En cuanto a los correspondientes problemas en las mallas groseras, consideraremos la discretización directa de las ecuaciones en cada una de las mallas de la jerarquía. Como operadores de transferencia entre las distintas mallas, elegimos interpolación lineal y su adjunto

como restricción para la presión, ya que estas incógnitas son aproximadas mediante elementos finitos lineales. Mientras que para las velocidades, que se aproximan utilizando elementos finitos cuadráticos, elegimos interpolación cuadrática y la restricción su adjunta. Más concretamente, en la Figura 1, se muestran las expresiones de la restricción resultante para cada uno de los tipos de punto de la malla en los que se discretizan las velocidades. Podemos observar, que para los puntos medios de los lados horizontales, verticales y diagonales, la expresión es la misma, solo que involucra a las incógnitas que aparecen alrededor del punto considerado en cada caso.

Por último, el suavizador suele ser la componente que más influye en el comportamiento de

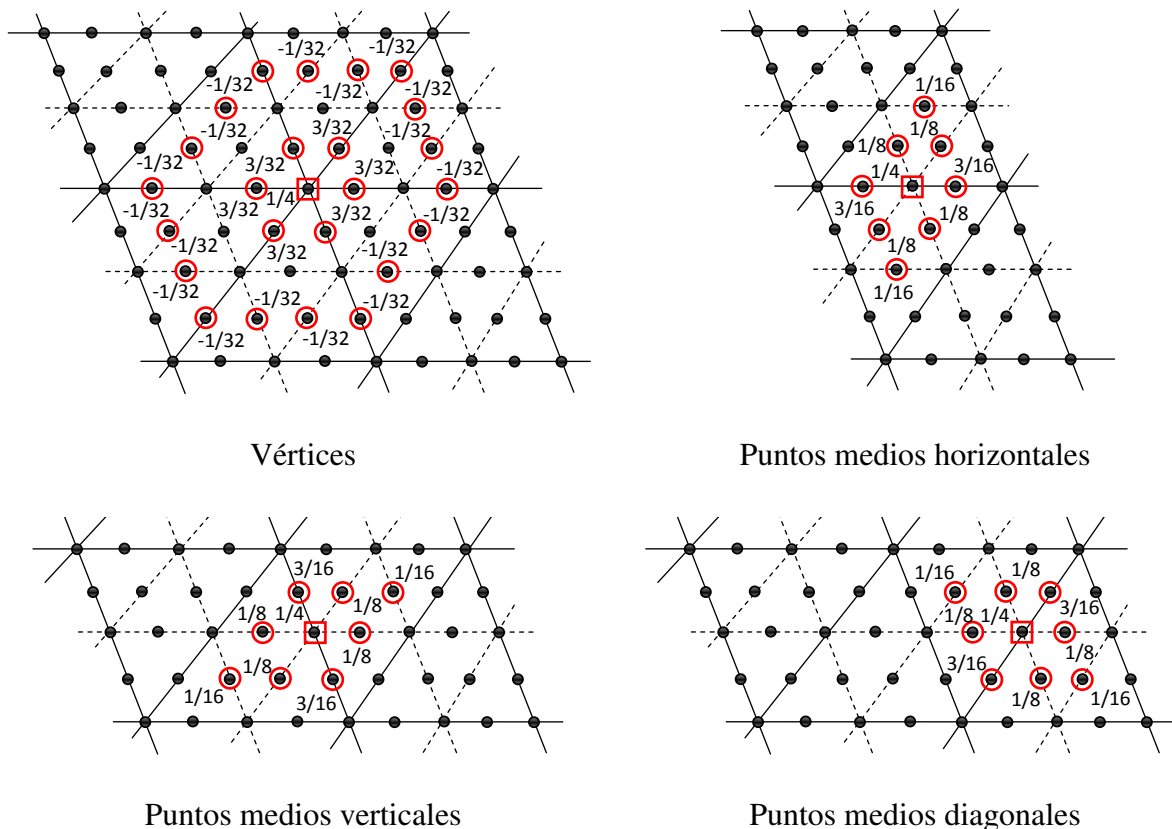


Figura 1: Restricción para los diferentes tipos de puntos de la malla en los que las incógnitas asociadas a las velocidades son discretizadas.

un método multimalla geométrico, y más aún cuando se trabaja con sistemas de PDEs. Así pues, tenemos que seleccionarlo cuidadosamente de forma que tenga buenas propiedades de suavizado con respecto a nuestro problema particular. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, como se ha comentado antes, el sistema lineal de ecuaciones que debemos resolver, resulta ser de tipo punto silla. Esto provoca que los suavizadores estándar no den buenos resultados, y por lo tanto un suavizador más sofisticado es necesario. Una visión general acerca de los métodos multimalla geométricos más apropiados para este tipo de sistemas discretizados sobre mallas rectangulares, fue presentada en [Oosterlee and Gaspar](#), donde los métodos multimalla basados en suavizadores de tipo caja o suavizadores distributivos aparecían como los más adecuados para la resolución eficiente de los problemas de tipo punto silla. Debido a que para algunas ecuaciones, el diseño de un suavizador distributivo no es inmediato, la relajación

de tipo caja parece la mejor opción para nuestro problema. Estos suavizadores, consisten en descomponer la malla en pequeños subdominios, que suelen solaparse, y tratarlos de forma separada, es decir, las ecuaciones correspondientes a los puntos que componen cada uno de los subdominios se resuelven de forma simultánea como un sistema.

Estos suavizadores fueron introducidos en Vanka (1986), para resolver la discretización por diferencias finitas sobre mallas rectangulares de las ecuaciones de Navier-Stokes. Y desde entonces, es usual su aplicación en el contexto de problemas de dinámica de fluidos, por ejemplo, en [39, 40, 71]. Estos suavizadores se han utilizado principalmente en mallas rectangulares, pero en este trabajo, se presenta una extensión de los suavizadores de tipo caja para mallas triangulares, adecuada para las ecuaciones de Navier-Stokes, que son las que nos ocupan. En particular, las incógnitas que resolvemos simultáneamente son para cada vértice de la malla, la incógnita de la presión situada en dicho vértice, y las 38 incógnitas asociadas a las velocidades que están situadas en el hexágono que aparece alrededor de dicho vértice, ver Figura 2. Por

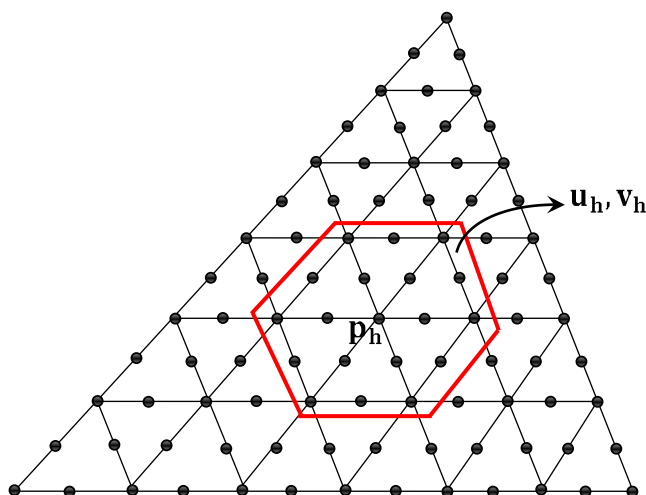


Figura 2: Incógnitas que forman los subdominios considerados para el suavizador de tipo caja, y son relajadas simultáneamente.

lo tanto, el suavizador consiste en recorrer los vértices de la malla en orden lexicográfico, y para cada vértice resolver el sistema 39×39 correspondiente a la caja asociada a dicho punto. Este tipo de suavizadores resulta ser de alto coste computacional, pero es necesario para el buen funcionamiento del multimalla. Una variante de estos suavizadores con menos coste computacional es el suavizador de tipo Vanka diagonal, que será investigado en el futuro.

4 EXPERIMENTO NUMÉRICO: PROBLEMA DE LA CAVIDAD

Nuestro objetivo en esta sección es la resolución de la discretización por elementos finitos P2-P1 del problema del flujo laminar incompresible en una cavidad triangular impulsada por una pared móvil, mediante la aplicación del método multimalla geométrico propuesto en la sección anterior.

En el campo de dinámica de fluidos, se han realizado un gran número de estudios acerca del problema de flujo laminar incompresible en una cavidad rectangular impulsada por una pared móvil. Debido a la simplicidad de la geometría y las condiciones de contorno, este problema se ha utilizado a menudo como test para nuevas técnicas o métodos numéricos para problemas

de flujos de recirculación. Menos estudios se han realizado de este problema con geometrías más complejas. Aquí proponemos como problema test el cálculo de flujo sobre una cavidad triangular impulsada por una pared móvil. El parámetro que controla el flujo es el número de Reynolds, que se define tomando como velocidad característica la velocidad de la parte superior y como dimensión característica el lado de la cavidad.

Vamos a considerar dos dominios con geometrías triangulares diferentes. El primer dominio considerado consiste en un triángulo equilátero de lado unidad, como se muestra en la Figura 3 junto con las condiciones de contorno. El número de Reynolds considerado para la simulación es 20, y como podemos observar en la Figura 4, un gran vórtice central abarca gran parte de la cavidad, además de aparecer una pequeña zona de recirculación asociada a uno de los vértices de la cavidad.

Este problema ha sido resuelto por el método multimalla descrito anteriormente. Un F-ciclo

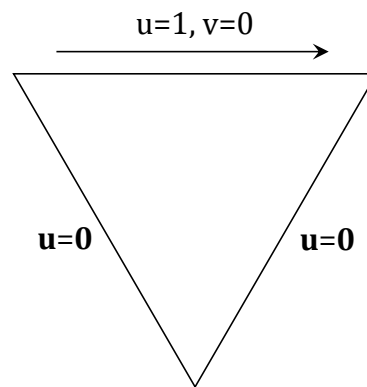


Figura 3: Dominio triangular equilátero para el problema de flujo laminar incompresible en una cavidad triangular.

con tres etapas de pre-suavizado y tres de post-suavizado ha sido utilizado, dando lugar a un método muy eficiente puesto que factores de convergencia próximos a 0.1 son obtenidos. Por

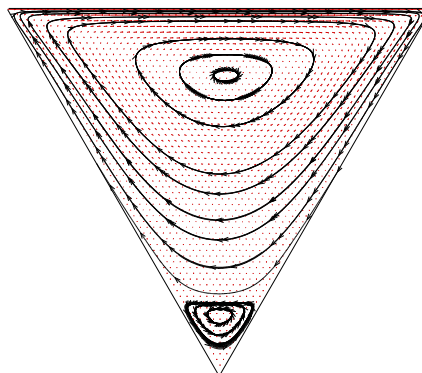


Figura 4: Vórtices obtenidos en el problema considerado en el dominio triangular equilátero, para número de Reynolds 20.

otro lado, el segundo experimento consiste en resolver el problema del flujo laminar incompresible en una cavidad triangular isósceles, que tiene un ángulo pequeño. En particular, el dominio de este segundo ejemplo es un triángulo isósceles con ángulo común de 75° , como se observa

en la Figura 5. La solución obtenida se muestra en la Figura 6, donde podemos observar como

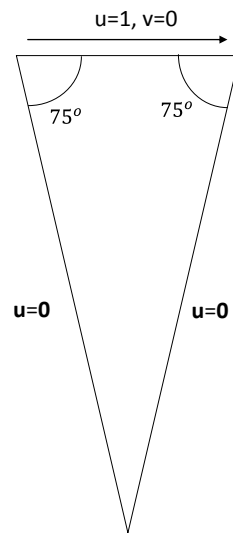


Figura 5: Dominio triangular isósceles para el problema de flujo laminar incompresible en una cavidad triangular.

aparecen cuatro vórtices en lugar de los dos que aparecían en el caso del dominio triangular equilátero.

Sin embargo, en relación con la eficiencia del método multimalla aplicado, se obtiene un deterioro del factor de convergencia debido a la anisotropía de la malla. En particular, para el triángulo isósceles se obtiene un factor de convergencia alrededor de 0.2. Suavizadores de tipo caja por líneas son requeridos en estas situaciones, pero esto será considerado en un futuro trabajo.

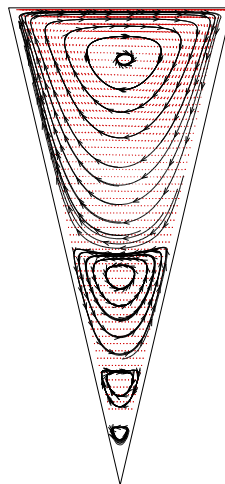


Figura 6: Vórtices obtenidos en el problema considerado en el dominio triangular isósceles, para número de Reynolds 20.

BIBLIOGRAFÍA

- Brandt A. *Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics*. GMD-Studie Nr. 85, Sankt Augustin, Germany, 1984.
- Briggs W., Henson V., and McCormick S. *A Multigrid Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- Gaspar F., Gracia J., Lisbona F., and Rodrigo C. Multigrid finite element methods on semi-structured triangular grids for planar elasticity.
- Gaspar F., Gracia J., Lisbona F., and Rodrigo C. Efficient geometric multigrid implementation for triangular grids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:1027–1035, 2010.
- Hackbusch W. *Multi-grid methods and applications*. Springer, Berlin, 1985.
- Heidenreich E., Gaspar F., Lisbona F., and Rodrigo C. Resolución de las ecuaciones de navier-stokes incompresibles por métodos multimalla.
- Oosterlee C. and Gaspar F. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type.
- Trottenberg U., Oosterlee C., and Schüller A. *Multigrid*. Academic Press, New York, 2001.
- Vanka S. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, 65:138–158, 1986.