



## 4<sup>to</sup> Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



# MSC THESIS: ANÁLISIS DE FLEXIÓN EN VIGAS SÁNDWICH CON FORMULAS SIMPLIFICADAS Y TEORÍAS DE ALTO ORDEN: RESULTADOS NUMÉRICOS Y PRUEBAS EXPERIMENTALES

Juan E. Lawrie<sup>1</sup>

<sup>1</sup>MSc Ingeniero Aeroespacial, Politecnico di Torino, Italia - Ingeniero Aeronáutico, FCEFYN, U. Nacional de Córdoba.

**Palabras claves:** Materiales Compuestos, Estructuras Sándwich, Análisis FEM, Análisis Experimental

### Resumen

---

El objetivo principal de esta tesis fue realizar una evaluación exhaustiva de las tensiones y deformaciones en vigas sándwich, en particular, casos con caras de aluminio y núcleos en espuma de alta densidad.

Comenzando con el estudio de las ventajas y desventajas de esta solución constructiva, se trabajó con teorías de primer orden para su caracterización, luego derivando a un análisis con teorías de alto orden. La teoría de orden superior presentada en este estudio fue verificada mediante un análisis por elementos finitos y posteriores pruebas experimentales en laboratorio.

Otro objetivo de este estudio es el de facilitar las tareas del Ingeniero de pruebas, el cual persigue una solución rápida y precisa en la caracterización de un material, así como segundo objetivo se presenta una simplificación a teorías de orden superior mediante el uso de coeficientes de corrección para vigas sándwich sujetas a esfuerzos de flexión.

---

## 1. ESTRUCTURAS SÁNDWICH

La tecnología sándwich es una de las innovaciones estructurales más valiosas en el mundo de los materiales compuestos. Ampliamente utilizada en la industria Aeroespacial y en los últimos años ha tomado gran relevancia en otras industrias, con gran aplicación en la Naval, Automotriz, incluso la industria Deportiva.

Para F.C.Campbell [1] un panel sándwich típico consiste en dos caras de revestimiento delgado de alta resistencia, unidos a un núcleo de peso ligero. Cada componente por sí mismo es débil y flexible, pero cuando se combinan en un panel sándwich producen una estructura de excelentes características.

El concepto básico de un panel sándwich es que las caras de revestimiento toman las cargas de flexión (tracción y compresión), mientras que el núcleo toma las cargas de corte. Podemos hacer una comparación con una viga con perfil “I” en la figura 2.1.

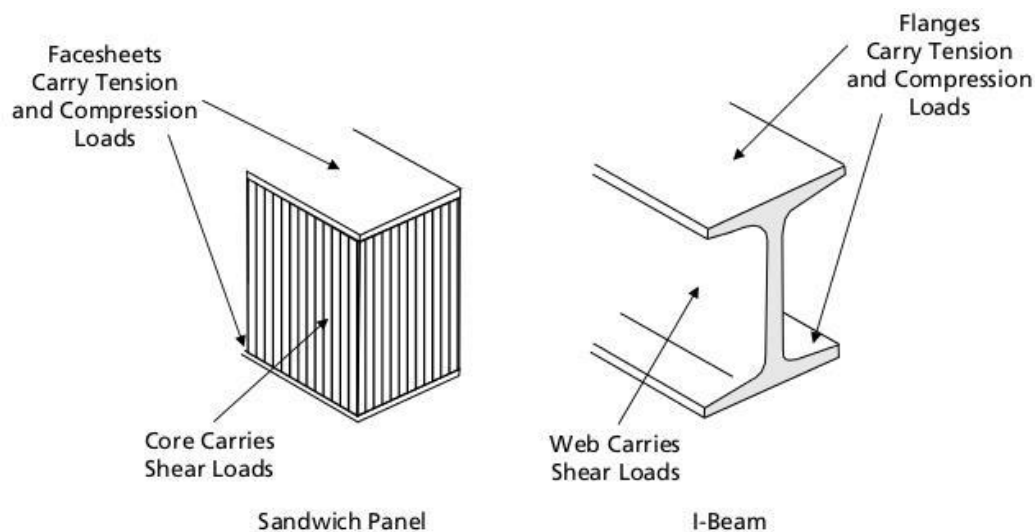


Figura 1.1: Panel sándwich panel comparado con una viga “IPN”. F.C.Campbell [1]

### 1.1. Caras (Facesheets)

Los materiales utilizados en las caras son normalmente aluminio, o laminados de material compuesto (tejidos de fibras de vidrio, carbono o aramida). Normalmente las caras son de espesores pequeños comparados con el núcleo (0.5 – 10 mm) dependiendo de su aplicación.

### 1.2. Núcleo (Core)

Pueden ser de materiales metálicos y no metálicos, en el primer caso generalmente formando sub estructuras (honeycomb), maderas balsa o espumas de diversas densidades. En general los honeycombs metálicos son más costosos y ofrecen mejores performances que las espumas, esto explica extenso uso en la industria Aeroespacial. No obstante las espumas son más sencillas de procesar a la hora de crear los paneles o vigas.

Para el caso de nuestro estudio se trabajó con caras de Aluminio y un núcleo de espuma de alta densidad de polimetacrilamida (marca registrada Rohacell) utilizada ampliamente en la industria espacial, además de sus buenas propiedades mecánicas posee propiedades dieléctricas.

Vale destacar que la elección del material se realizó luego del estudio numérico como se justificara más adelante.

## 2. RESPUESTA MECANICA DE UNA VIGA SANDWICH

Al tratarse de un material compuesto y dada su compleja conformación, la precisión teórica de su respuesta mecánica es campo en exploración continua. Considerando un reporte de Hexcel Composites [2] considerando una viga empotrada con una carga perpendicular aplicada en su extremo libre. Se genera un momento flector que será máximo en el extremo empotrado y los esfuerzos de corte se distribuyen en la longitud de la viga, figura 2.1. Claramente tenemos esfuerzos de compresión en la cara inferior y tracción sobre la superior. El núcleo que separa las caras se encarga de distribuir los esfuerzos de corte entre estas y hace que la viga funcione como una estructura homogénea

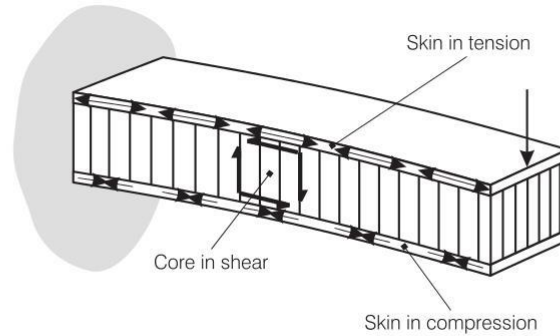


Figura 2.1: Esfuerzos en una viga sándwich cargada en su extremo libre. Hexcel Composites [2].

Entonces la deflexión total del panel o viga sándwich se compone de una componente pura de por momento flector y componentes por corte. La primera está relacionada con los módulos de tracción y compresión de los materiales de las caras, y la resistencia al corte viene relacionado con el material del núcleo y su adhesivo a las caras, quien aquí juega un papel preponderante.

**Deflexión Total = Componente por Momento Flector + Componente por Corte**

### 2.1. Ecuaciones Básicas

Enmarcados sobre la Teoría de la Viga de Euler Bernulli (TVEB), según David H. Allen [3] las asunciones básicas de las teorías lineales para vigas sándwich con finas caras son:

- La rigidez transversal del núcleo es infinita,
- El núcleo no se alarga o comprime en la dirección  $x$ ,
- Las caras se comportan de acuerdo con los supuestos de Euler-Bernoulli, no hay componente  $xz$  con esfuerzo de corte y su espesor en  $z$  nunca cambia.

En TVEB la deformación axial  $\varepsilon_{xx}$  se supone que varía linealmente como:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (1)$$

Así la tensión axial será:

$$\sigma_{xx} = -z E \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2)$$

Donde  $E$  varía en  $z$ . El momento flector y esfuerzo de corte vendrán dados como sigue:

$$M_x(x) = -\left(\iint z^2 E dz dy\right) \frac{d^2 w}{dx^2} = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3)$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

Siendo  $D$  la rigidez flexional de la viga.

Con el uso de estas relaciones y teniendo en cuenta las asunciones básicas, pasamos a definir el campo de tensiones. Los subíndices corresponden a su nomenclatura en idioma inglés.

$E_f$  : Modulo de Young para las caras (facesheets)

$f$ : Espesor de las caras.

$E_c$  : Módulo de Young para el núcleo (core)

$c$ : Espesor del núcleo.

$$\sigma_{xx}^f = \frac{z E_f M_x}{D}; \quad \sigma_{xx}^c = \frac{z E_c M_x}{D} \quad (4)$$

$$\tau_{xx}^f = \frac{Q_x E_f}{2D} \left[ \left( \frac{c}{2} + f \right)^2 - z^2 \right]; \quad \tau_{xx}^c = \frac{Q_x}{2D} \left[ E_c \left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + f \right)^2 - z^2 \right] + E_f f (f + c) \quad (5)$$

Generalmente  $E_f \gg E_c$ , así  $D$  se puede aproximar:

$$D \approx 2E_f f \frac{c}{2} \left( f + \frac{c}{2} \right) \quad (6)$$

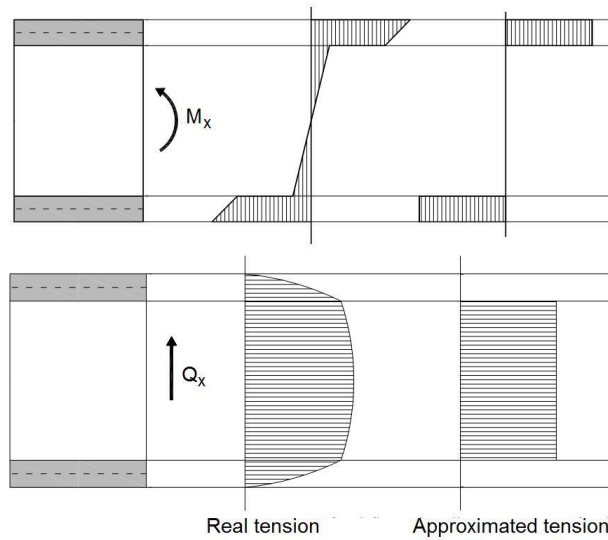


Figura 2.2: Diagrama de esfuerzos reales y aproximados en una viga sándwich.

Considerando caras delgadas las tensiones pueden asumirse como constantes en todo el espesor, así:

$$\sigma_{xx}^f \approx \pm \frac{M_x}{f c}; \quad \sigma_{xx}^c \approx 0 \quad (7)$$

$$\tau_{xx}^f = 0; \quad \tau_{xx}^c = \frac{Q_x}{c} \quad (8)$$

Así de acuerdo a lo expresado en el inicio, el problema puede dividirse en dos partes, consideramos el núcleo trabajando al corte y las caras en tracción compresión. Entonces cuando la viga sándwich se encuentra sometida a un momento flector  $M_x$  y un esfuerzo cortante  $Q_x$ , figura 3.3, la deflexión total  $w$  (flecha máxima) puede ser expresada como la suma de una componente  $w_b$  debida a la flexión (bending) y otra componente  $w_s$  debida al corte (shear).

$$w(x) = w_b(x) + w_s(x) \quad (9)$$

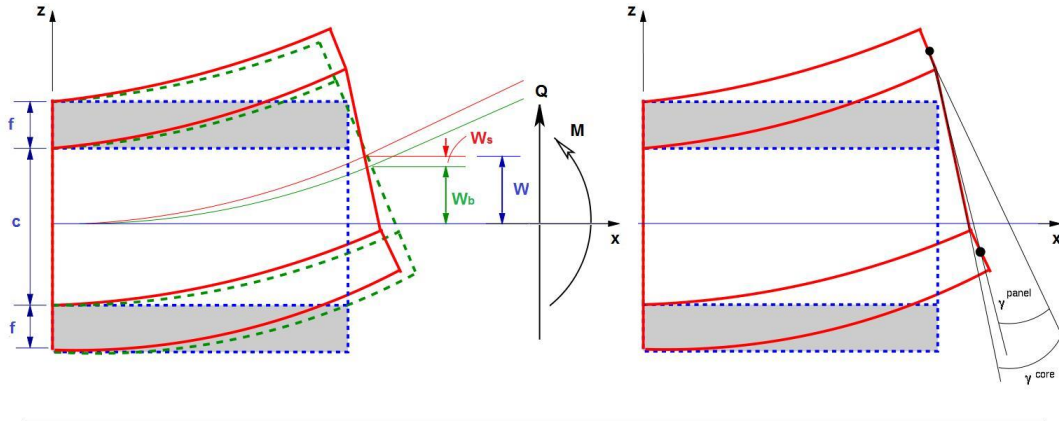


Figura 2.3: Viga Sándwich sometida a flexión.

Y la deformación angular por corte en el núcleo (core), viene dada como:

$$\gamma_{zx}^{core} = \frac{c+f}{c} \frac{dw_s}{dx} = \frac{c+f}{c} \gamma_{zx}^{panel} \quad (10)$$

La cual es mayor que la del panel. Recordando que la deformación de las caras va acorde a las asunciones básicas TVEB.

## 2.2. Refined Zigzag Beam Theory RZT

Investigación llevada adelante por Gherlone, Di Sciuva y Tessler [4] es una teoría refinada para laminados de material compuesto y vigas sándwich que contiene la cinemática de la Teoría de la viga de Timoshenko (TVT) y su corrección de corte. Derivada del Principio de Trabajo Virtual, emplea una nueva función lineal por tramos en Zigzag que proporciona una representación más realista de los estados de deformación por flexión-corte.

Llamadas teorías de Zigzag porque suponen un patrón de Zigzag en los desplazamientos y aseguran la continuidad de los esfuerzos de corte a través de todo el espesor del laminado o viga. La característica principal de este modelo es que la tensión de corte no es continua en el espesor.

- Concepto de la cinemática Zigzag

En estructuras anisotrópicas sometidas a flexión la respuesta al corte y deformaciones axiales generalmente se manifiesta por un campo de desplazamiento en zigzag a través del espesor. Considerando las capas de material individuales, las distribuciones de desplazamiento son en general no lineal y con variación suave.

Considerando una viga hecha de  $N$  capas de material ortotrópico, que están perfectamente unidas entre sí y son paralelas al eje  $x$  con su sección transversal. Se considera bajo la carga estática por tanto solo se presentan deformaciones planas, figura 2.4, que incluye una carga distribuida  $q(x)$ , cargas axiales puntuales ( $T_{xa}$ ,  $T_{xb}$ ) y corte ( $T_{za}$ ,  $T_{zb}$ ), actuando en las secciones de referencias transversales  $x = x_a$  y  $x = x_b$ . Para cualquier punto a través de las capas  $k$  el vector de desplazamiento se expresa como:

$$\begin{cases} u_x^{(k)}(x, z) = u(x) + z\theta(x) + \Phi^{(k)}(z)\Psi(x) \\ u(x, z) = w(z) \end{cases} \quad (11)$$

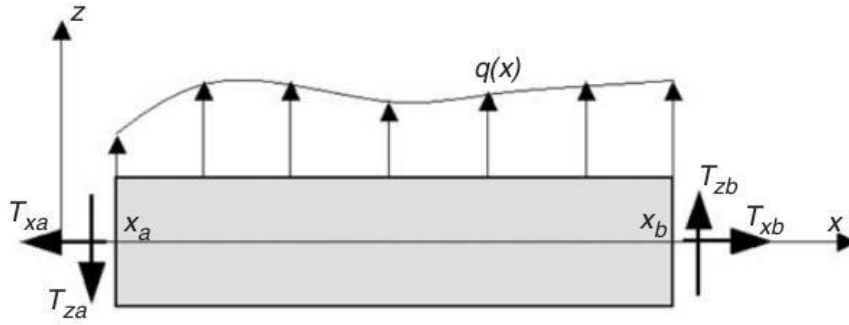


Figura 2.4: Viga sujeta a carga transversal y longitudinal.

Donde  $z [h;-h]$  es la coordenada en el espesor, definida desde la mitad de la viga sobre el eje  $x$ , siendo  $2h$  el espesor total,  $u(x)$  es el desplazamiento axial uniforme,  $\theta(x)$  es la rotación de flexión,  $w(x)$  desplazamiento transversal,  $\Psi(x)$  es la amplitud de la contribución Zigzag para el desplazamiento axial,  $\Phi^{(k)}(z)$  denota una función lineal por tramos en Zigzag que se definirá a continuación. Si cualquiera de los  $\Phi^{(k)}(z) = 0$  y  $\Psi(x) = 0$ , la ecuación (11) se correspondería con la TVT si  $\theta(x)$  es una variable independiente.

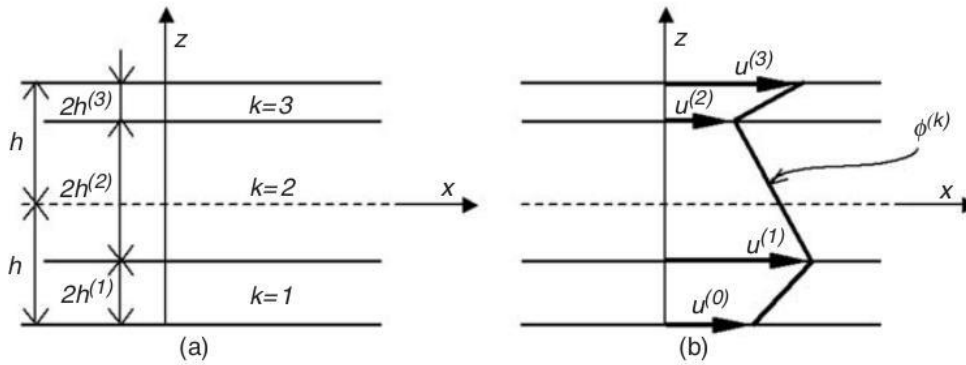


Figura 2.5: (a) Notación para un laminado de tres capas, (b) Función Zigzag genérica.

Podemos ver en la figura 2.5 la notación utilizada para un laminado de tres capas (una viga sándwich) y observamos también la función Zigzag  $\Phi^{(k)}$  a través de esta. Partiendo de la (11) podemos definir el campo de deformaciones como:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{(k)}(x, z) \equiv u_{x,x}^{(k)} = u_{,x} + z\theta_{,x} + \Phi^{(k)}(z)\Psi_{,x} \\ \gamma_{xz}^{(k)}(x, z) \equiv u_{x,z} + u_{z,x}^{(k)} = \gamma + \beta^{(k)}\Psi \end{cases} \quad (12)$$

Donde  $\beta^{(k)} \equiv \Phi_{,z}^{(k)}$  y  $\gamma \equiv w_{,x}$  que representa una media de la deformación por corte. Recordando que  $\Phi^{(k)}(z)$  es lineal por tramos y  $\beta^{(k)}$  es también constante por tramos, aseguramos la continuidad en cada capa por lo que podemos expresar las relaciones tensión-deformación de Hooke para las  $k$  ortotrópicas capas como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x^{(k)} & 0 \\ 0 & G_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Donde  $E_x^{(k)}$  y  $G_{xz}^{(k)}$  son los módulos de tracción y corte en cada capa  $k$ .

La figura 2.6 nos muestra a modo ilustrativo un caso de una viga simplemente apoyada sometida a flexión, donde puede apreciarse la diferencia del efecto Zigzag representando el desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(x, z)$  para la TVT (en inglés TBT - Timoshenko Beam Theory), la RZT y la solución exacta dada con las ecuaciones de elástica.

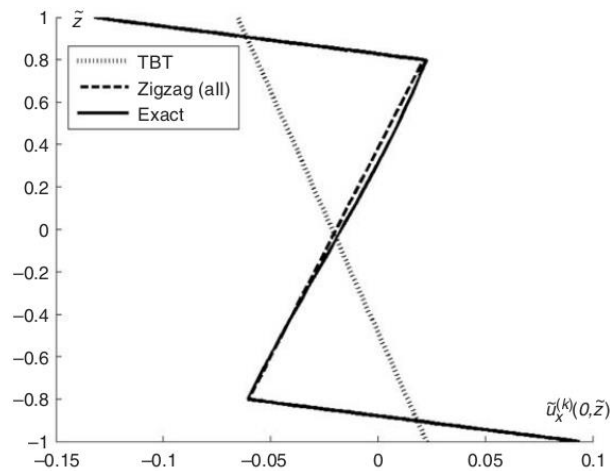


Figura 2.6: Desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(z)$  Comparativa.

### 2.3. Normas ASTM

Para las pruebas experimentales se trabajara bajo los requisitos de las normas ASTM para determinar las propiedades de un material sándwich.

- ASTM C393-00 Flexural Properties of Sandwich Constructions [5]
- ASTM D7250/D7250M-06 Determining Sandwich Beam Flexural and Shear Stiffness [6]

Ambos métodos persiguen la determinación de las propiedades de las construcciones tipo sándwich sometidas a flexión de plano de tal manera que los momentos aplicados producen curvatura en las capas del sándwich para así determinar su rigidez a flexión y corte.

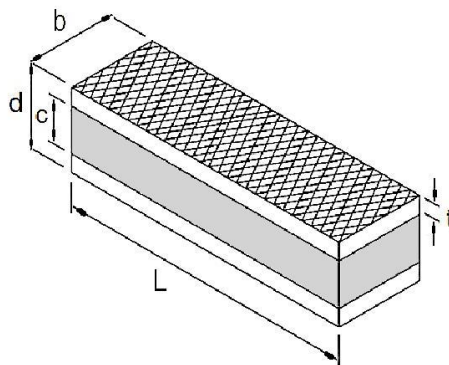


Figura 2.6: Dimensiones generales de una probeta.

El ensayo se puede realizar en 3 puntos de flexión (3PB - 3 point bending) o en 4 puntos de flexión (4PB - 4 point bending), la figura 2.7 muestra un caso genérico de carga.

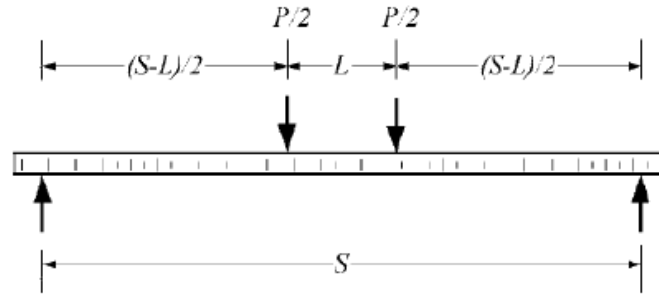


Figura 2.7: ASTM configuración estándar de carga, 4 o 3 puntos ( $L=0$ ).

$$\Delta = \frac{P(2S^3 - 3SL^2 + L^3)}{96D} + \frac{P(S-L)}{4U}$$

$$D = \frac{E(d^3 - c^3)b}{12}$$

$$U = \frac{G(d-t)^2b}{(d-2t)}$$
(14)

La ecuación (14)  $\Delta$  determina la deflexión al centro de la viga o deflexión máxima, donde  $D$  es la rigidez flexional y  $U$  la rigidez al corte. La normativa trabaja directamente con  $E$ : Modulo de Young del material de las caras, y con  $G$ : Modulo de corte del material de Núcleo.

Cabe señalar que la Normativa se basa en la TVEB aplicada a vigas sándwich, lo que limita su aplicación en algunos casos, justamente en los que haremos hincapié. Esto es fácil de ver comparando la ecuación (9) con  $\Delta$ .



### 3. VALORACION DE LA TEORIA RZT

Para comenzar el análisis se buscó hacer un filtro para así llegar a los casos de interés. A partir de un gran número de posibles probetas, analizando diferentes parámetros adimensionales, como se resume en la tabla 3.1. Considerando a la RZT como nuestra teoría base, trabajaremos el modelo numérico de esta,  $C^0$  element based on RZT numerical model [7] el cual trabaja con entorno Matlab.

Relación Modulo Young	$r_E = \frac{E_{core}}{E_{face}}$	$\frac{1}{10000}$ a $\frac{1}{10}$ , 5 valores
Relación Modulo Corte	$r_G = \frac{G_{core}}{G_{face}}$	$\frac{1}{10000}$ a $\frac{1}{10}$ , 5 valores
Relación de Espesores	$r_h = \frac{h_{face}}{h_{core}}$	$\frac{1}{1000}$ a 1, 5 valores
Esbeltz*	$\lambda = \frac{L_{tot}}{h_{tot}}$	8 a 100, 5 valores

Tabla 3.1: Variables adimensionales. (\*El parámetro de Esbeltz no está relacionado con el de carga critica).

La estructura en cuestión se ha discretizado en 100 elementos  $C^0$  para el caso de vigas cortas y 200 para las esbeltas, con el fin de tener una mejor precisión.

Luego del primer filtrado se llega a 60 casos que representan el efecto Zigzag ( $r_E = r_G = \frac{1}{2500}$  y  $\frac{1}{500}$ )

#### 3.1. RZT vs Normativa y definición de probetas.

Como se dijo previamente la normativa posee limitaciones para su aplicación y estas son:

$\lambda > 20$	$r_h < \frac{1}{10}$	$\frac{b}{h} > 2$
----------------	----------------------	-------------------

Tabla 3.2: Limitaciones previstas por normativa.

Las probetas deben cumplir con estas limitaciones o los resultados no serán correctos, vale destacar que la tercera condición se cumple en todos los casos, visto que sino perdería el carácter de viga y pasaría a ser un panel.

El problema se plantea justamente sobre los casos preseleccionados. Se lleva a cabo una comparativa de deflexiones transversales máximas (mid-span deflection), según la ecuación (14)  $\Delta$  prevista por la normativa, versus un  $w_{RZT}$  obtenido por el  $C^0$  numerical model, corroborando así errores de hasta un 20% para casos de vigas con relación de espesores  $r_h = 1$  y sobre todo con poca esbeltz. La Tabla 3.3 muestra los resultados en un análisis de 4 puntos de flexión (4PB). Es interesante también notar que en casos cercanos al límite impuesto por normativa, es decir casos de probetas posibles, también se observan errores que llegan al 4 o 5%.

4PB					
			$r_E = 1/2500$	$r_E = 1/500$	
			$r_G = 1/2500$	$r_G = 1/500$	
$r_h$	L	S	$\Delta$ % Error	$\Delta$ % Error	
0,01	10	20	3.224	4.645	
0,025			3.333	4.266	
0,05			2.121	5.147	
0,1			5.477	6.587	
<b>1</b>			<b>18.771</b>	<b>21.778</b>	
$r_h$	L	S	$\Delta$ % Error	$\Delta$ % Error	
0,01	20	40	3.296	3.658	
0,025			5.339	4.113	
0,05			5.314	5.874	
0,1			4.221	5.965	
<b>1</b>			<b>9.791</b>	<b>10.270</b>	
$r_h$	L	S	$\Delta$ % Error	$\Delta$ % Error	
0,01	50	100	3.668	3.987	
0,025			4.681	4.564	
0,05			4.726	4.660	
0,1			5.881	5.220	
<b>1</b>			<b>8.503</b>	<b>9.412</b>	

Tabla 3.3: Error porcentual.  $w_{RZT}$  vs  $\Delta$

Llegados este punto definiremos los materiales de las probetas a ensayar a posteriori. Como se dijo en el comienzo las vigas sándwich serán realizadas en aluminio y espuma de alta densidad. Comenzando con la selección de caras en material Aluminio, podemos definir, de manera aproximada las características de las espumas requeridas. De esta manera luego de una búsqueda en el mercado, se da con las espumas de polimetacrilamida (PMI) las cuales están registradas bajo la firma Rohacel [8]. En la Tabla 3.4 se resumen los datos de los materiales.

Material		E (Mpa)	G (Mpa)	$r_E$	$r_G$
Aluminum	F	73000	27444	-	-
Rohacell 31 IG	C1	36	13	2028	2111
Rohacell 110 WF	C2	180	70	406	392

Tabla 3.4: Materiales que conforman las probetas.

Por razones lógicas como se ve se logra arribar a relaciones de  $r_E = r_G \approx \frac{1}{2000}$  para C1 y  $\approx \frac{1}{400}$  para C2.

De esta manera las probetas construidas para los ensayos experimentales se reducen a 12, con la idea de realizar 16 ensayos.

Material core	Case	Thickness distribution	Total thickness (mm)	Cross section width (mm)	Length (mm)	Quantity of specimens	Test	
C1	A	1/20/1	22	66	440	1	4PB	
	B					1	3PB	
	C				880	1	4PB	
	D					1	3PB	
	E	2/20/2	24	72	480	1	4PB	
					F	960	1	4PB
	G	5/5/5	15	45	300	1	4PB	
						H	1	3PB
					I	600	1	4PB
							L	1
C2	M	1/20/1	22	66	440	1	4PB	
	N				880	1	4PB	
	O	2/20/2	24	72	480	1	4PB	
					P	960	1	4PB
	Q	5/5/5	15	45	300	1	4PB	
					R	600	1	4PB

Tabla 3.5: Detalle de probetas y ensayos.

Para poder apreciar la cinemática Zigzag en acción se realiza una comparativa realizada con el  $C^0$  numerical model, involucrando a los casos A, C, I y R. En todos los casos se representa el desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(z)$  definido como se explicó anteriormente,  $z [h;-h]$  es la coordenada en el espesor.

- Efecto de la relación de Esbeltez  $\lambda$ .

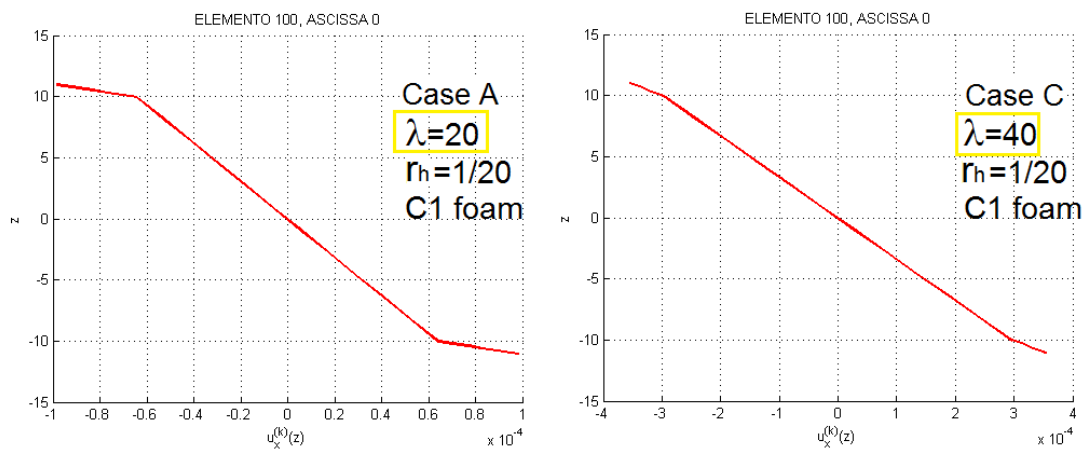


Figura 3.1: Desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(z)$  (Efecto de esbeltez).

- Efecto de la relación de Espesores  $r_h$ .

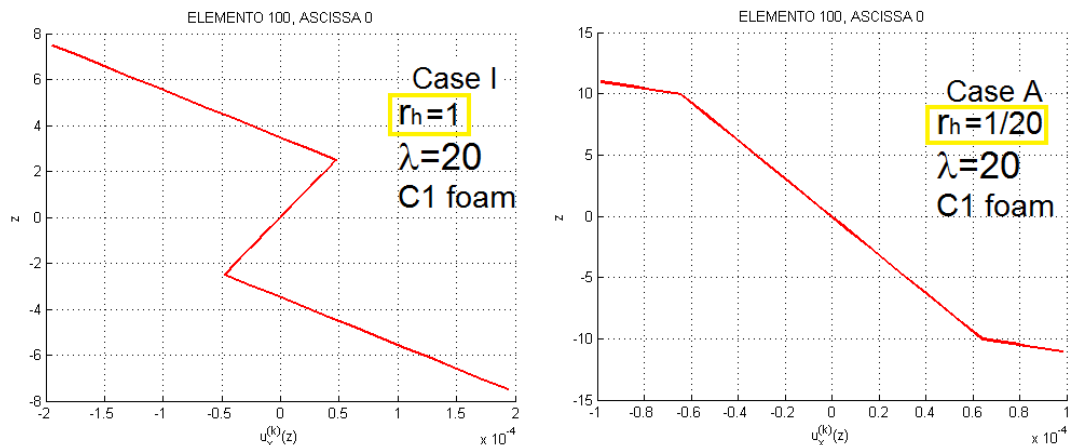


Figura 3.2: Desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(z)$  (Efecto de relación de Espesores).

- Efecto de la relación de tipos de Material del Núcleo.

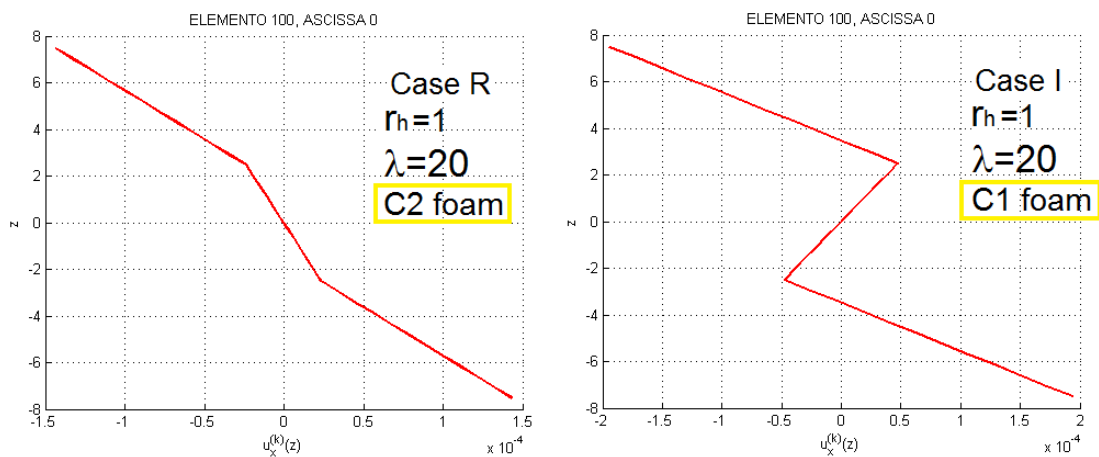


Figura 3.3: Desplazamiento axial  $u_x^{(k)}(z)$  (Efecto de Materiales Núcleo).

Como podemos observar los efectos de Zigzag se pronuncian con vigas de poca esbeltez y caras gruesas.

### 3.2. Análisis FEM - RZT vs Nastran.

MSC Nastran [9] es un software comercial de análisis estructural utilizado para realizar análisis estáticos y dinámicos, a través de dominios lineales y no lineales, que además se complementa con tecnologías de análisis de fatiga. Nos interesa principalmente su potencial en el complejo comportamiento de estructuras de materiales compuestos y las capacidades de modelización no lineales. Por estas razones se torna interesante enfrentar MSC Nastran con el RZT  $C^0$  numerical model. Algo muy importante que también nos permite Nastran es de verificar la viabilidad de la realización de pruebas experimentales, es decir, obtener desplazamientos transversales posibles de medir con los elementos disponibles en el laboratorio.

Se considera un modelo paramétrico de una viga sándwich. Para simplificar el cálculo se toma la mitad de la viga, aprovechando la simetría. Las condiciones de borde en la línea central sólo permiten movimiento de rotación y vertical. Debido al número considerable de casos a analizar, se decidió crear un “archivo sesión” (session file), a través del cual es posible cambiar fácilmente las condiciones de carga geométrica y materiales de los 16 casos a examinar. Nos proponemos trabajar de la manera más real posible la prueba real, por esta razón se añade una porción de la viga luego del apoyo, lo que garantiza un margen adicional en el soporte.

Con el objetivo de simular un modelo 3D a partir de un modelo 2D, esto fue necesario para conferir las propiedades a los elementos (con el fin de asignar los valores de ancho a la viga), seleccionando elementos membranales 2D en “tensión plana”. Sin embargo, debido a la geometría de las probetas, la contracción transversal es impedida generando un estado de tensión de tipo “deformación plana”, por lo que se tuvo que modificar el módulo de Young y el coeficiente de Poisson (el módulo de corte sigue siendo el mismo) con el fin de ser simulado en “deformación plana”. Un resumen de este truco matemático se reportan en la Tabla 3.6.

Mechanical Characteristics	FACE	CORE C1	CORE C2
$E_{plane strain}^* = \frac{E_{plane stress}}{1 - \nu^2}$	81921 MPa	42.25 MPa	196 MPa
$G^* = G$	27444 MPa	13 MPa	13 MPa
$\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu}$	0.49	0.3846	0.2857

Tabla 3.6: Características mecánicas para simular un estado de deformación plana en Nastran.

La carga se aplicó en dos puntos diferentes sobre la base de las configuraciones referidas a las Normas ( $x=0$  para 3 puntos de flexión 3PB, y  $Lm/2$  para 4 puntos de flexión 4PB), con cargas genéricas de  $P=1N$  y  $P=0.5N$  en cada caso.

Para comparar los resultados de Nastran con RZT fue necesario extraer reportes de datos (report documents) así de esta manera procesarlos en entorno Matlab. Así se llegó a comparar las variables deflexión transversal  $\Delta(z, x)$  y el desplazamiento axial  $u_x(z)$ .

Para el caso de la deflexión transversal  $\Delta(z, x)$  se realizó la comparativa de igual modo que con la Normativa. Se calculó el error porcentual obteniendo los siguientes resultados:

Case	E	G	H	I	Q
Error %	3,2	6,7	6	4	3,3

Tabla 3.7: Errores porcentuales. RZT vs Nastran.

Como podemos apreciar el error se mantiene en el orden de 3%, excepto el caso G. La figura 3.4 nos muestra los resultados de los casos antes mencionados, superponiendo las curvas de deflexión transversal de media viga.

Para el caso del desplazamiento axial, figura 3.5, vemos como Nastran arroja resultados muy similares a RZT con correspondencias casi perfectas como puede apreciarse en el caso M.

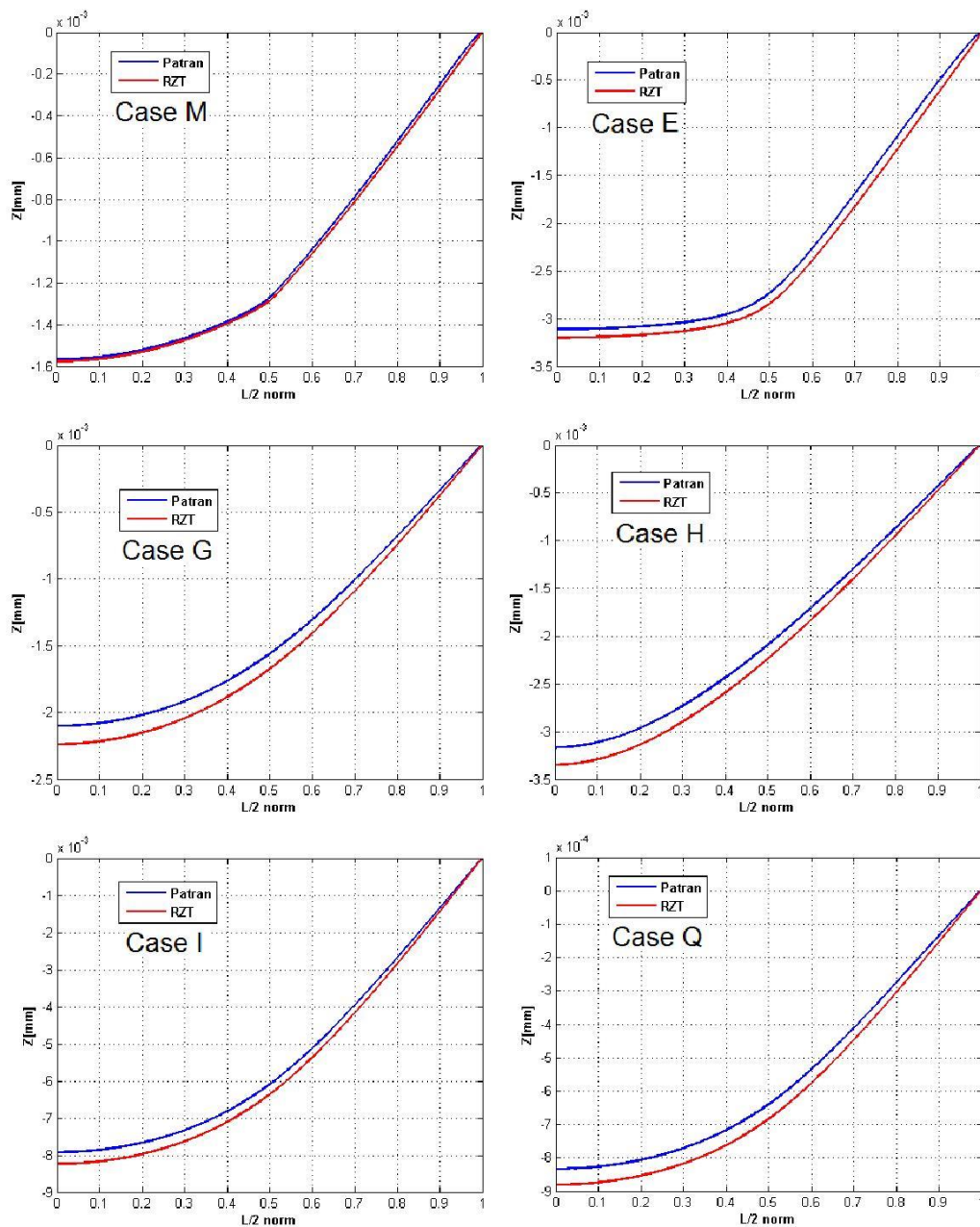


Figura 3.4: Deflexión transversal  $\Delta(z, x)$ .

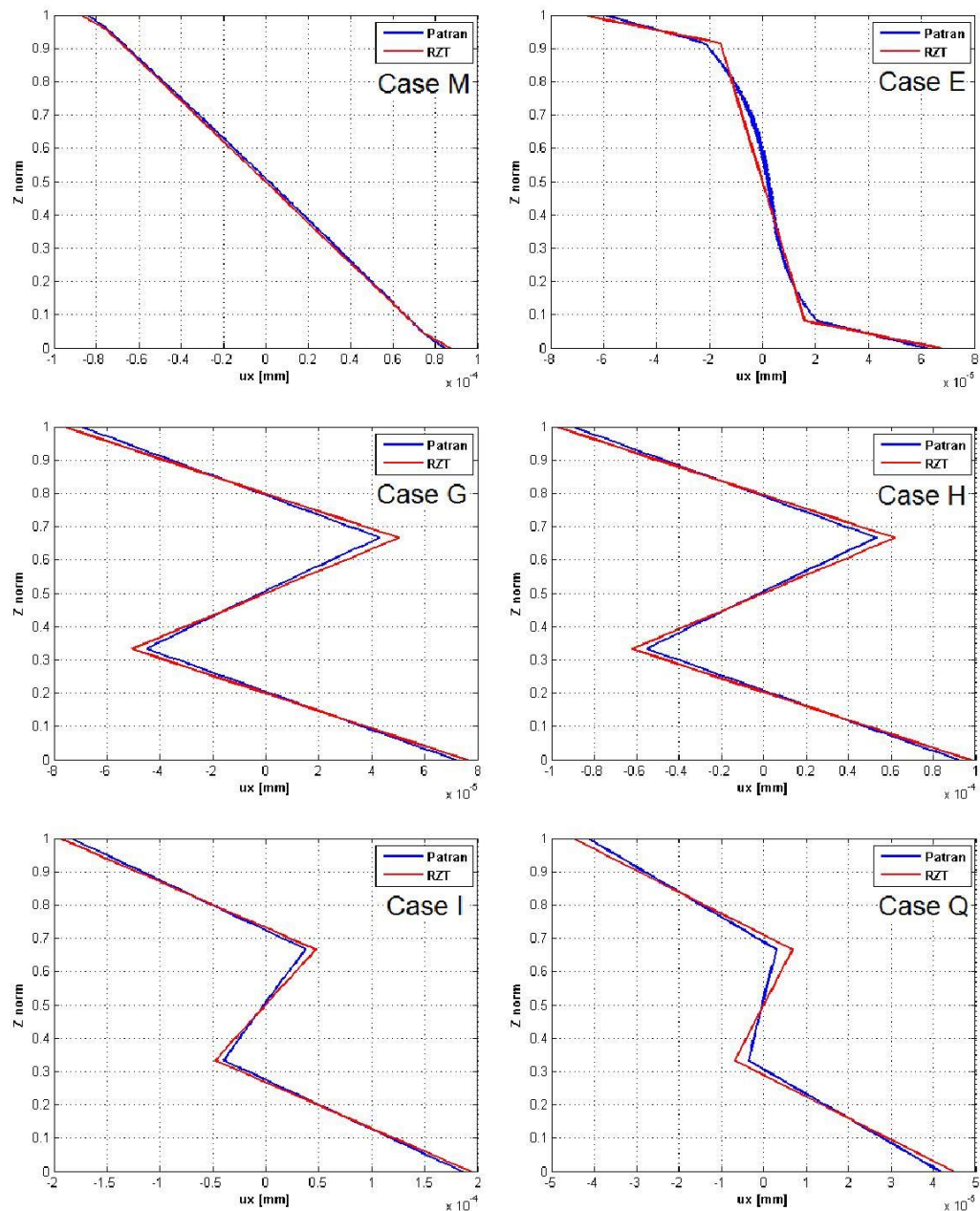


Figura 3.5: Desplazamiento axial  $u_x(z)$ .

#### 4. ANALISIS EXPERIMENTAL

Las pruebas experimentales se han llevado a cabo en el laboratorio LAQ-AERMEC del Departamento de Ingeniería Mecánica y Aeroespacial del Politécnico de Torino. Por razones de tiempo se realizaron un total de dos pruebas, variando la carga respetando los límites de cada probeta de modo de no sufrir rotura o deformación plástica. La Figura 4.1 muestra las dos probetas y la Figura 4.2 y Tabla 4.1 muestran la geometría de las mismas.

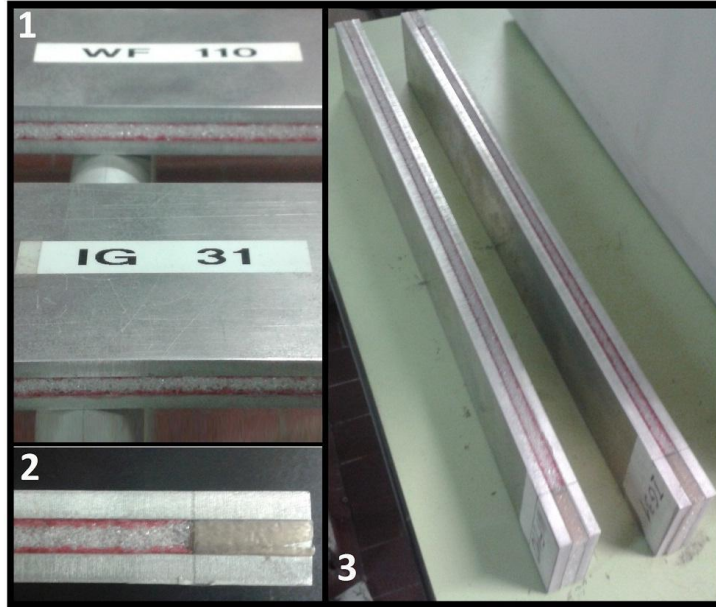


Figura 4.1: Fotografía de Probetas Sándwich - 1. Tipos de espuma, 2. Vista lateral en la puntera, 3. Vista general

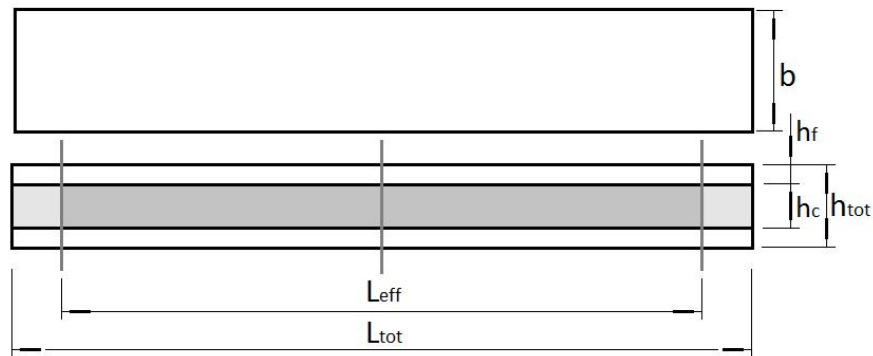


Figura 4.2: Geometría de las probetas.

Foam	Leff	Ltot	htot	b	hf	hc	E	G
IG31	321	359	15,88	48,30	5	5,88	36	13
WF110	321	360	16,07	48,27	5	6,07	180	70

Tabla 4.1: Geometría de las probetas. E y G en MPa, longitudes en milímetros.

#### 4.1. Descripción de equipos

- Estación UTM (Universal Testing Machine) METROCOM 20 Toneladas
- Transformador diferencial de variación lineal (LVDT), se utilizaron dos HBM-LVDT( $\pm 2.5\text{mm}$ ) para medir la deflexión transversal, uno posicionado en el centro de la viga, y el otro en coincidencia con un punto de carga.
- Célula de carga (Load Cell), se usó una HBM-Strain Gage Load Cell (200Kg) para medir la carga aplicada en la viga.
- Sistema de adquisición de datos (DAQ), se usó un HBM-MGC Plus, de 24 bit de resolución con capacidad de 10000 canales.
- Computadora con Software provisto por HBM (CATMAN).

La Figura 4.3 muestra un esquema de la estación de trabajo. Luego la Figura 4.4 muestra un esquema de cómo se dispuso la carga.  $L_{load} = 110.5\text{mm}$  y  $L_1 = 105.25\text{mm}$ . Luego más adelante se muestra una fotografía de la estación en la Figura 4.5.

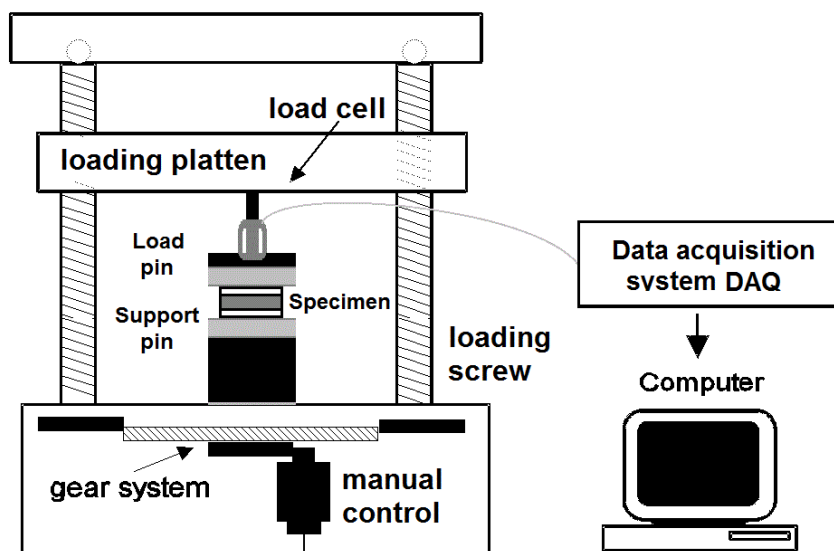


Figura 4.3: Esquema de instalaciones.

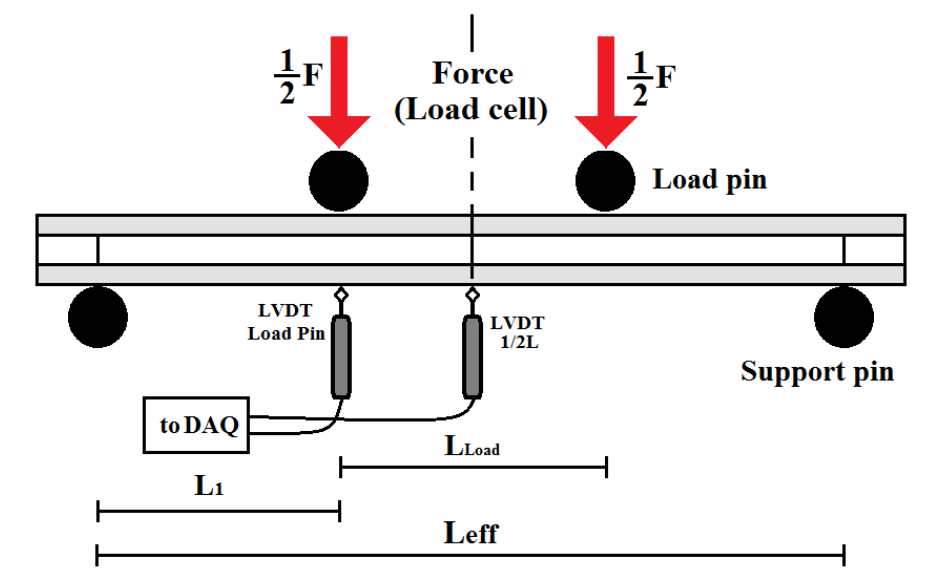


Figura 4.4: Esquema de carga y sensores LVDT.





Figura 4.5: Fotografía viga sándwich en posición de ensayo.

## 4.2. Procedimientos para la prueba

El primer paso es la medida de las dimensiones de cada espécimen. A continuación, la probeta se coloca en los soportes de la estación UTM. Se alinean y ajustan los soportes para los sensores LVDT. Utilizando el control manual se acercan los pines de carga a la probeta. A continuación, se realiza la calibración del instrumento, es decir, todos los sensores se fijan en cero. El ajuste de frecuencia para el DAQ,  $f_r = 1$  Hz, es decir un dato por segundo. Se procede a cargar manualmente. Se censa la carga aplicada cuidando de no pasar los límites establecidos, 50Kg para la probeta con espuma GI31 y 100Kg para la WF110.

## 4.3. Resultados

En la Figura 4.6 se presenta para cada probeta la curva de carga  $F$  vs deflexión trasversal  $w_m$  obtenida experimentalmente superpuesta con el modelo RZT y  $\Delta$  calculado por la normativa. En la Figura 4.7 también se ha hecho una comparativa del sensor colocado en el pin de carga  $w_{cyl}$  con RZT para el caso IG31.

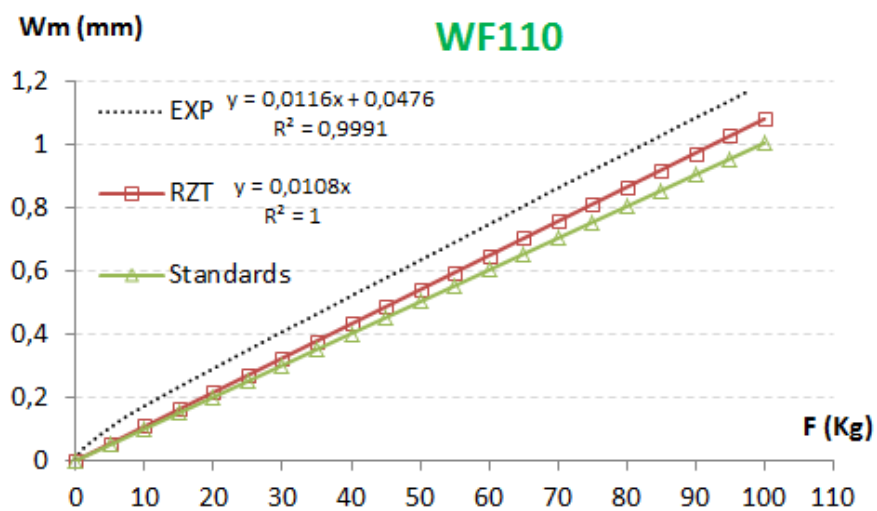
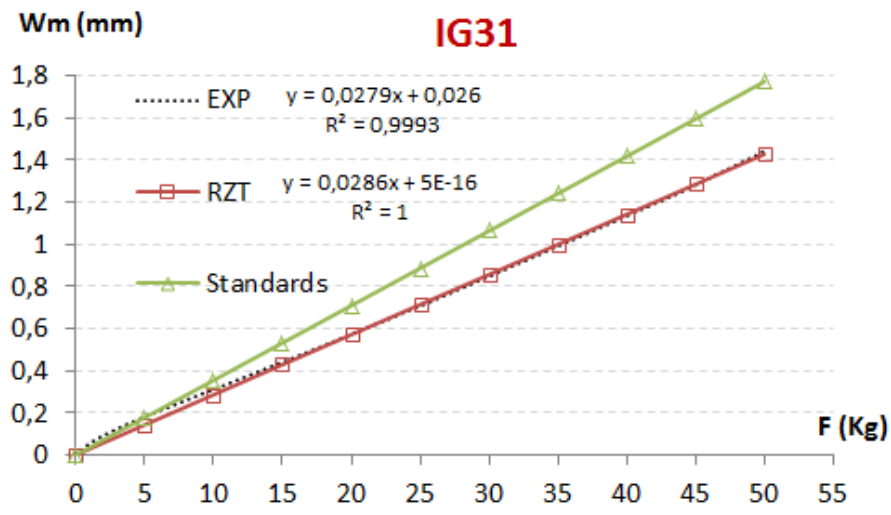


Figura 4.6:  $w_m$  vs  $F$  para ambos casos. Comparación con RZT y Normativa.

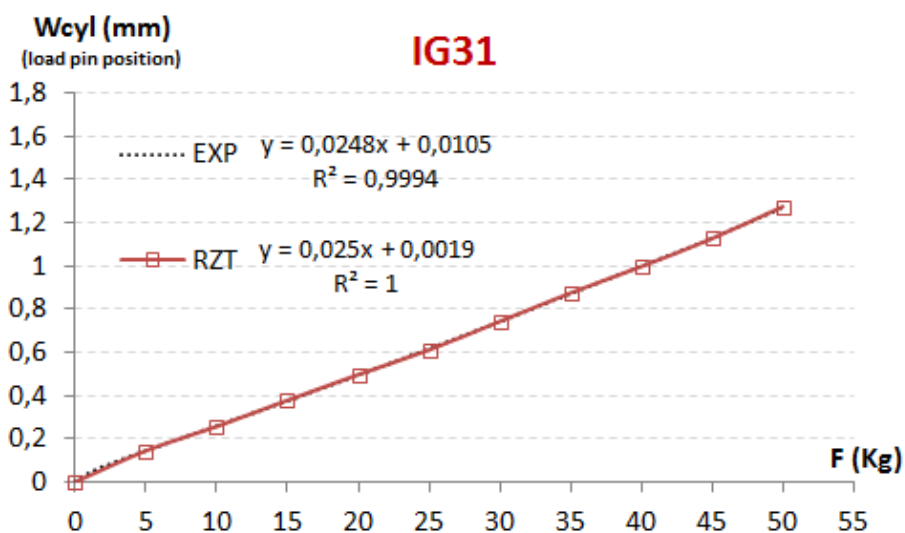


Figura 4.7:  $w_{cyl}$  vs  $F$  para ambos casos. Comparación con RZT.

Se puede observar una correlación muy buena para el caso IG31, las curvas Experimental y RZT se encuentran fusionadas. En el caso WF110, espuma más rígida, esto no es tan exacto.

## 5. COEFICIENTES CORRECTIVOS

Durante una campaña de ensayos se persigue una solución simple y físicamente perceptible. El ingeniero de pruebas prefiere evitar el uso de grandes ecuaciones y teorías complicadas, por lo que una forma sencilla de corregir los errores realizados por las teorías básicas es a través de fórmulas sencillas utilizando coeficientes de corrección.

De acuerdo con Hongbin Shen et al en [10], el objetivo es mejorar la fórmula clásica de deflexión de vigas sándwich con núcleo de espuma con la ayuda de dos factores de corrección usando una teoría sándwich de orden superior. Los factores de corrección introducidos dependen de las propiedades del material del núcleo y de los revestimientos, la relación de esbeltez de la viga, y el espesor de las caras, que se eligen para variar dentro de los intervalos prácticos utilizados normalmente en el diseño sándwich. Aprovechando el hecho de material del núcleo puede ser asumido como isotrópico se busca realizar una correlación lineal similar pero trabajando con la RZT.

Desarrollando el concepto citado en [10], denominado “Beam Compliance”  $C = \frac{\delta}{P}$  siendo  $\delta$  la deflexión transversal y  $P$  la carga aplicada. Trabajando sobre (11) podemos derivar en una expresión del tipo:

$$C^{RZT} = \beta^{RZT} \left( \frac{1}{G_c} \right) + C_b^{RZT} \quad (15)$$

Al mismo tiempo para las ecuaciones de la normativa [5] y [6], en 3 puntos de flexión 3PB o 4 puntos 4PB

$$\left\{ \begin{array}{l} 3PB \quad C = C_b + C_s = \frac{L^3}{48D} + \frac{L}{4U} \\ \\ = \frac{L^3}{24E(h-t)^2} + \frac{L(h-2t)}{4G_c(h-t)^2} \\ \\ C = \frac{1}{G_c} \left( \frac{L(d-2t)}{4b(d-t)^2} \right) + \frac{L^3}{4E(d^3-c^3)b} = a_{st} \frac{1}{G_c} + b_{st} \\ \\ 4PB \quad C = C_b + C_s = \frac{11L^3}{768D} + \frac{L}{8U} \\ \\ = \frac{11L^3}{384E(h-t)^2} + \frac{L(h-2t)}{8G_c(h-t)^2} \\ \\ C = \frac{1}{G_c} \left( \frac{L(d-2t)}{8b(d-t)^2} \right) + \frac{11L^3}{384E(h-t)^2} = a_{st} \frac{1}{G_c} + b_{st} \end{array} \right. \quad (16)$$

Donde  $U$  y  $D$  ya fueron definidos en la (14).

De esta manera con la (15) y (16) realizando las rectas de Beam Compliance para diferentes relaciones de Esbeltez  $\lambda$ , diferentes relaciones de espesores  $r_h$  arribamos a una correlación lineal de la forma:

$$C^{RZT} = C_b k_b + C_s k_s \quad (17)$$

$$k_b = \frac{1}{G_c} \frac{\beta^{RZT}}{a_{st}} \quad k_s = \frac{C_b^{RZT}}{b_{st}}$$

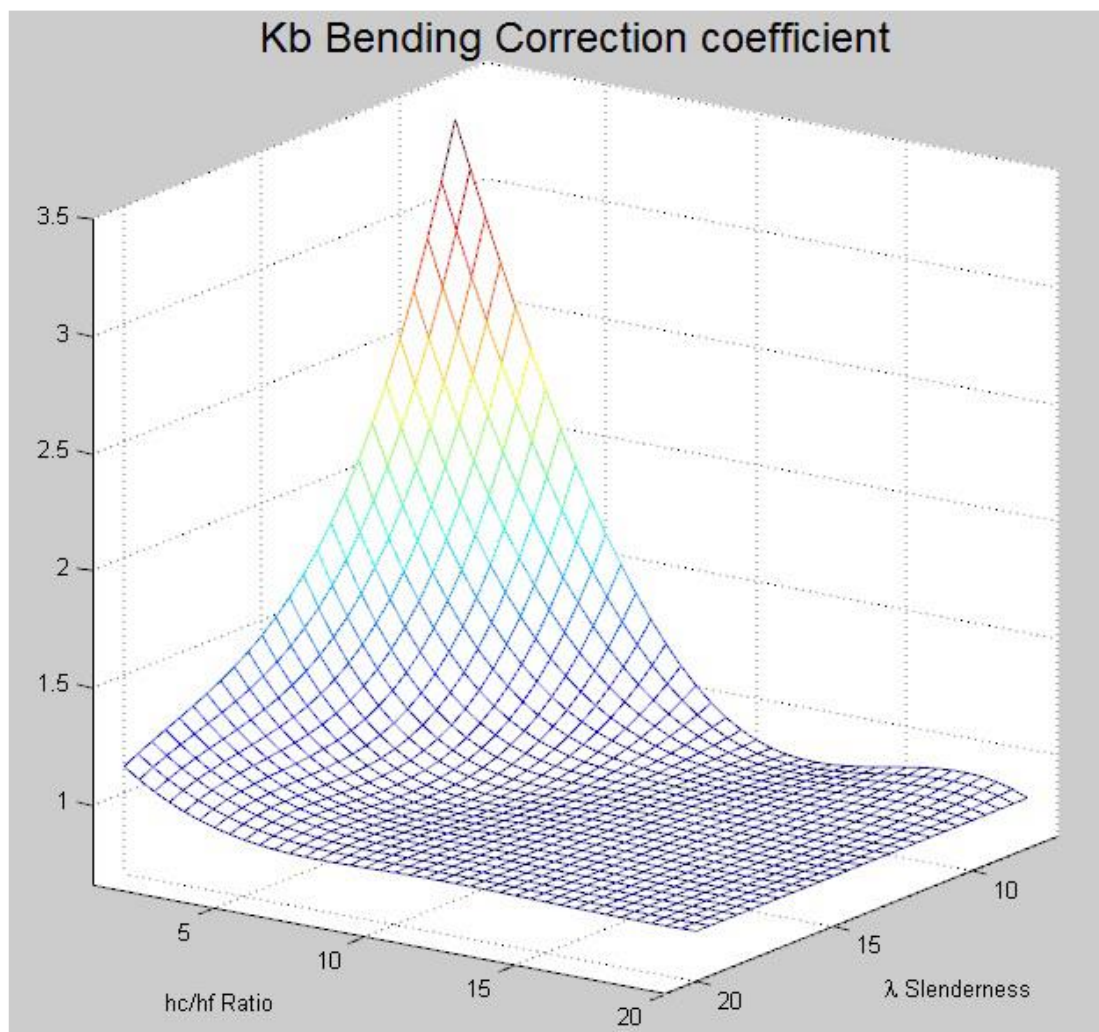
Ecuación que vuelve a tomar la forma de (9), pero esta vez con coeficientes de para corregir la flexión y el corte.

Podemos resumir los coeficientes obtenidos en la Tabla 5.1

4PB				3PB			
Slenderness	$\frac{h_{face}}{h_{core}}$	Kb	Ks	Slenderness	$\frac{h_{face}}{h_{core}}$	Kb	Ks
$\lambda=8$	1	3,305	0,165	$\lambda=8$	1	3,478	0,118
	1/5	1,923	0,754		1/5	2,600	0,567
	1/10	0,968	0,968		1/10	1,424	0,802
	1/15	0,878	0,995		1/15	1,116	0,883
	1/20	0,868	0,999		1/20	1,000	0,921
$\lambda=20$	1	1,107	0,576	$\lambda=20$	1	1,205	0,426
	1/5	0,890	0,966		1/5	0,990	0,813
	1/10	0,873	0,996		1/10	0,908	0,919
	1/15	0,869	1,001		1/15	0,885	0,954
	1/20	0,866	1,005		1/20	0,874	0,972

Tabla 5.1: Coeficientes de corrección para 4PB y para 3PB .

Para extender el rango de usos de coeficientes y así incluir más casos, se realiza una gráfica de coeficientes en 3D para el caso 4PB. De esta manera se deja a disposición un Abaco de corrección.



Abaco 5.1: Coeficientes de corrección por Flexión para 4PB.

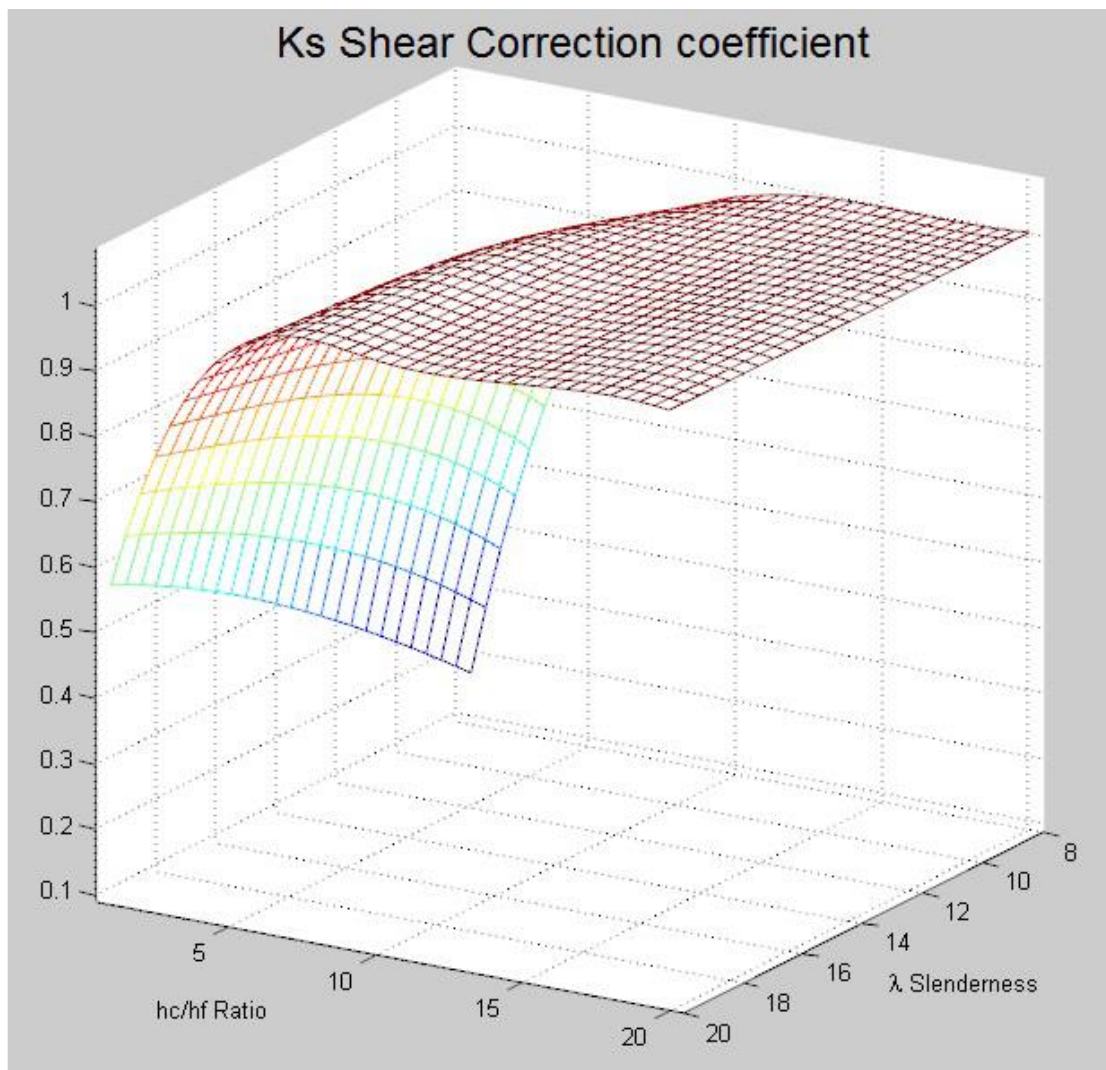


Tabla 5.2: : Coeficientes de corrección por corte para 4PB.

## 6. CONCLUSIONES

Como se dijo anteriormente el objetivo principal de esta tesis fue la evaluación exhaustiva de los esfuerzos de tensión-deformación en vigas sándwich, en particular, los casos hechos de caras de aluminio y núcleo de espuma de alta densidad. La investigación tuvo una duración total de 8 meses y se pueden resumir las siguientes conclusiones:

- La precisión del modelo numérico RZT fue demostrada por dos vías:  
Análisis FEM  
Prueba Experimental
- Se pudieron constatar las limitaciones de la Normativa por el uso de teorías de primer orden en sus fórmulas.
- Se simplificó el uso de las teorías complejas mediante coeficientes de corrección para flexión y corte.
- Parte de los resultados experimentales obtenidos en esta investigación fueron volcados en una publicación científica. [11]

## REFERENCIAS

- [1] F.C. Campbell. Manufacturing Technology for Aerospace Structural Materials. © Elsevier Ltd., 2006.
- [2] Duxford Hexcel Composites. Honeycomb sandwich design technology. Technical report, ® Hexcel Registered Trademark, 2000.
- [3] Walter Haisler David H. Allen. Introduction to Aerospace Structural Analysis. Wiley, 1985.
- [4] M. Di Sciuva A. Tessler and M. Gherlone. A Refined Zigzag Beam Theory for composite and sandwich beams. Journal of Composite Materials 2009 43:1051, 2009.
- [5] Copyright © ASTM International, editor. ASTM C393-00 Flexural Properties of Sandwich Constructions, PO Box C700, West Conshohocken, PA, United States., 2000. URL <http://www.astm.org/>
- [6] Copyright © ASTM International, editor. ASTM D7250/D7250M-06 Determining Sandwich Beam Flexural and Shear Stiffness, PO Box C700, West Conshohocken, PA, United States., 2006. URL <http://www.astm.org/>
- [7] A. Tessler M. Gherlone. and M. Di Sciuva. C0 beam elements based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. Composite Structures 93 (2011) 2882-2894, 2011.
- [8] 2014 ® Evonik Industries AG, issued 1st May. URL <http://www.rohacell.com>
- [9] ® Copyright 2014 MSC Software Corporation. URL <http://www.mscsoftware.com>
- [10] Steven R. Nutt Hongbin Shen, Vladimir S. Sokolinsky. Accurate predictions of bending deflections for soft-core sandwich beams subject to concentrated loads. Composite Structures 64 (2004) 115{122, 2004.
- [11] Luigi Iurlaro, Marco Gherlone, Massimiliano Mattone and Marco Di Sciuva, Experimental assessment of the Refined Zigzag Theory for the static bending analysis of sandwich beams Journal of Sandwich Structures and Materials-2016